



~~N/E~~
Hutt.

Ins: N. 1723.

40

11. K.

40 App. mil. 103 ^c (2

NOUVELLES
EXPÉRIENCES
D'ARTILLERIE.

NOUVELLES
EXPERIENCES
D'ARTILLERIE.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

C

00

NOUVELLES EXPÉRIENCES D'ARTILLERIE,

FAITES PENDANT LES ANNÉES 1787, 1788, 1789 ET 1791,

OU L'ON DÉTERMINE LA FORCE DE LA POUDRE, LA VITESSE INITIALE DES BOULETS DE CANON, LES PORTÉES DES PIÈCES A DIFFÉRENTES ÉLÉVATIONS, LA RÉSISTANCE QUE L'AIR OPPOSE AU MOUVEMENT DES PROJECTILES, LES EFFETS DES DIFFÉRENTES LONGUEURS DES PIÈCES, DES DIFFÉRENTES CHARGES DE POUDRE, ETC., ETC. ;

PAR CHARLES HUTTON,

Membre des Sociétés royales de Londres, de la Société des Sciences de Hollande, et ex-Professeur de Mathématiques à l'École royale militaire de Woolwich.

TRADUIT DE L'ANGLAIS

PAR O. TERQUEM,

Docteur ès-Sciences, Officier de l'Université, Membre de l'Académie de Metz, Professeur de Mathématiques aux Écoles royales, et Bibliothécaire du Dépôt central de l'Artillerie.

SECONDE PARTIE.



PARIS,

BACHELIER, SUCCESSEUR DE M^{re} V^e COURCIER,

LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,
QUAI DES AUGUSTINS, N^o 55.

1826

Ga 65/1344

NOUVELLES
EXPERIENCES
D'ARTILLERIE.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Verlags-
bucherei VII
München

Altbestand 29696

AVIS DU TRADUCTEUR.

A diverses époques Hutton a entrepris de continuer et de perfectionner les expériences commencées par Robins et Darcy, pour déterminer la force d'impulsion de la poudre, au moyen, soit du bloc, soit de la pièce pendules, et de parvenir ainsi à mesurer, à prévoir les effets des projectiles que lance l'artillerie. Les premiers essais de Hutton, consignés dans les Transactions philosophiques de 1778, remontent à 1775; ils avaient principalement pour objet l'évaluation des vitesses initiales qu'impriment des charges de poudre à des boulets d'un calibre connu. Les poids des projectiles ne dépassaient pas 3 livres et les vitesses atteignaient 7 à 800 pieds par seconde. Le résumé de ces premiers essais a été donné par Lombard, à la fin de sa traduction des Principes d'Artillerie de Robins, publiés à Dijon en 1783. Hutton revint sur ses expériences, en agrandit le champ, améliora les appareils, augmenta leurs dimensions, et s'en occupa pendant huit années, de 1783 à 1789, et en 1791.

Les épreuves des quatre premières années, de 1783 à 1787, ne furent publiées qu'en 1788; c'est ce dernier ouvrage de Hutton qui a été traduit en 1802, par M. P.-L. de Villantroys, colonel d'artillerie. Cette excellente traduction, exécutée avec une admirable sagacité, enrichie de notes très instructives, a exercé une grande et heureuse influence sur le public artilleur de France. A l'instar de Hutton, les esprits se sont dirigés vers la recherche des lois empiriques de la Balistique; on a mieux étudié et mieux apprécié, isolément et dans leur ensemble, les diverses circonstances qui dominant le tir; on a appris des faits que l'on ignorait, et mieux connu ceux qu'on savait; c'est la découverte de ces lois, ce sont les conséquences qu'on peut en déduire, qui

ont conduit M. de Villantroys à l'invention de l'obusier et du mortier qui portent son nom (1), invention que d'autres ont modifiée avec succès pour l'approprier au tir horizontal des boulets creux. Toutefois, jusqu'en 1786, Hutton n'a expérimenté que sur des boulets pesant seulement une livre; il n'en fut pas ainsi dans les années subséquentes. En 1812, il fit paraître un ouvrage en 3 volumes in-8°, sous le titre suivant : *Tracts on mathematical and philosophical subjects; comprising among numerous important articles, the theory of Bridge, with several plans of recent improvement; also the results of numerous experiments on the force of gun powder, with applications to the modern practice of artillery. London 1812.* « Traité de Mathématiques et de Physique, renfermant, entre autres objets nombreux et importants, une théorie des Ponts avec quelques projets d'amélioration; les résultats d'une longue suite d'expériences sur la force de la Poudre, avec des applications à la pratique moderne de l'Artillerie. » Ces Traités sont au nombre de trente-huit. Le 34^e (commençant à la page 306, paragraphe 1^{er}, second volume, se termine à la page 80, n° 124, du troisième volume) est une seconde publication de l'ouvrage de 1785, ci-dessus mentionné, traduit par M. de Villantroys, et que l'on peut regarder, selon l'ordre des temps, comme la première partie de la traduction que l'on offre aujourd'hui au public. La présente traduction, ou seconde partie, comprenant la fin du 34^e Traité, ainsi que les Traités suivans, jusqu'au 37^e inclusivement, renferment les expériences faites dans un espace de six années; elles étaient dirigées vers la recherche de la vraie loi de la résistance de l'air, ou, ce qui revient au même, vers l'appréciation des pertes de vitesse que ce fluide fait éprouver aux projectiles de 3 ou 4 livres qui le traversent; avec les faibles vitesses

(1) Voir son Mémoire en date du 1^{er} septembre 1804, et conservé aux archives du Dépôt central de l'Artillerie.

de 20 pieds, qu'on évalue à l'aide du cylindre rotatoire de Robins, jusqu'aux vitesses de 2000 pieds par seconde, imprimées par la poudre dans les bouches à feu, et qu'on mesure par les excursions d'un bloc pendule. Des tables construites avec soin et classées avec méthode permettent de saisir clairement l'ensemble de 585 expériences sur le pendule, et de 191 expériences sur le cylindre, et d'en conclure ensuite les lois de la résistance de l'air, moins simples qu'on ne l'a cru jusqu'alors; mais ces lois ont gagné en exactitude ce qu'elles ont perdu en simplicité. Tout ce que l'artilleur peut désirer que la science lui fournisse pour pratiquer avec succès son art, tous les problèmes les plus importants de la Balistique pratique, sont résolus d'une manière satisfaisante pour les besoins du service, dans le 37^e Traité, auquel Hutton a donné le titre de *Théorie et pratique de l'Artillerie*. Le lecteur s'apercevra facilement que ce Traité, quel qu'en soit le mérite, pouvait être abrégé, et qu'on aurait pu supprimer beaucoup de longs raisonnemens qui portent le cachet du grand âge qu'avait atteint l'auteur lorsqu'il les a composés; d'ailleurs il paraît que Hutton destinait ce Traité, en quelque sorte le résumé de tous ses travaux, non-seulement aux personnes familiarisées avec les sciences mathématiques, mais encore à celles auxquelles ces connaissances sont presque étrangères, et pour lesquelles les longues explications, la répétition des mêmes idées différemment présentées, ne sont pas superflues: c'est ce qui nous explique l'usage fréquent que l'auteur fait des formules du Calcul différentiel, et les détails qu'il donne sur des opérations purement arithmétiques.

On a cru devoir conserver dans la traduction les unes et les autres, afin de rendre avec plus de fidélité la manière de l'auteur; maintenant il ne reste plus, pour compléter la théorie balistique, que de prolonger la série des expériences jusqu'aux plus hauts calibres de l'artillerie, et de faire sur les portées les épreuves indiquées par Hutton. Déjà le vœu de ce professeur a été rempli en

partie par M. Grégory, son digne successeur à la chaire de Woolwich. On publiera incessamment la traduction complète de tout ce qui a été fait à Woolwich, depuis la retraite de Hutton; déjà un lumineux résumé de ces expériences se trouve dans l'ouvrage, estimé à si juste titre, de M. le baron Dupin, sur la Grande-Bretagne; on y joindra la traduction du Mémoire sur le tir des balles à fusil, dû au célèbre comte Rumfort, connu alors sous le titre de sir Thompson; on publiera successivement aussi tout ce qui a été fait pour la Balistique chez les nations étrangères, et principalement en Allemagne.

Notre intention a d'abord été de donner, sous forme de supplément, les applications numériques que nous avons faites des résultats de Hutton aux calibres et projectiles en usage dans l'artillerie française; mais ayant été chargé de la rédaction d'un Cours spécial sur la Balistique, nous avons cru plus convenable de réserver ces applications pour faire partie de cet ouvrage. Comme dans tout le cours de cette traduction il s'agit de rapports, de mesures comparées, plutôt que de grandeurs absolues, il eût été superflu de réduire les mesures anglaises en mesures nationales, ce qui aurait très inutilement alongé notre tâche; elle nous a été singulièrement facilitée, grâce à la complaisance de M. le capitaine Piobert, officier d'artillerie aussi zélé qu'instruit, qui a bien voulu lire notre manuscrit et nous faire part de ses observations; nous devons aussi témoigner notre reconnaissance à M. Francfort, ancien répétiteur à l'École d'Artillerie de la Garde royale, qui nous a communiqué une traduction qu'il avait faite du 37^e Traité: son travail nous a été très utile.

NOUVELLES EXPÉRIENCES D'ARTILLERIE,

OU L'ON DÉTERMINE LA FORCE DE LA POUDRE, LA VITESSE INITIALE DES BOULETS DE CANON, LES PORTÉES DES PIÈCES A DIFFÉRENTES ÉLÉVATIONS, LA RÉSISTANCE QUE L'AIR OPPOSE AU MOUVEMENT DES PROJECTILES, LES EFFETS DES DIFFÉRENTES LONGUEURS DES PIÈCES, DES DIFFÉRENTES CHARGES DE POUDRE, etc., etc.

EXPÉRIENCES DE 1787.

125. CETTE année, l'objet principal des expériences du pendule était de déterminer les pertes de vitesse qu'éprouvait le boulet en traversant différentes masses d'air, et la résistance de ce fluide, correspondante à une vitesse donnée du projectile. La pièce employée était le n° 2. On a choisi les charges de 2 onces et de 8 onces, parce que la première charge donne au projectile une vitesse de 800 à 900 pieds par seconde, et la deuxième charge donne une vitesse de 1600 à 1800 pieds par seconde; c'est dans cet intervalle que, selon M. Robins, la loi de la résistance de l'air change; au lieu d'être proportionnelle au carré de la vitesse, la résistance croît dans un rapport environ trois fois plus grand.

Pour avoir, dans ces expériences, de la poudre toujours de même espèce ou de même force, on fit un mélange de poudre fraîche tirée de trois barils; on fondit des boulets bien ronds et bien unis sur leur surface; ils avaient 2 pouces de diamètre et très peu de vent; leur poids était de 18 onces, à un ou

deux drachmes près, en plus ou en moins. Les charges étaient renfermées, comme précédemment, dans des sachets de flanelle, et légèrement tassées, de manière à être toutes de même longueur dans l'âme de la pièce.

126. *Lundi 10 septembre 1787.*

On passa ce jour-là à peser le pendule et à mesurer les distances des centres de gravité et d'oscillation. On obtint les résultats suivans :

Poids du pendule et de sa tige..... 791 livres. (p)

Distance du centre de gravité à l'axe. 78,2 pouces. (g)

Nombre d'oscillations en 10 minutes., 401, moyenne entre deux résultats.

On suspendit le pendule à sa place, et l'on prépara tout pour commencer à tirer le lendemain.

127. *11 septembre 1787, depuis 10 heures jusqu'à 1 heure.*

Temps sec.

Baromètre, 30,33. Thermomètre, 58°.

NUMÉROS.	CHARGES.	POIDS des BALLES.			DISTANCE de la pièce au pendule	VIBRATIONS du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.		VALEURS DE		VITESSES de la BALLE.
		onces.	onc.	dr.				onces.		p	g	
					pieds.	c.	pouces.			livres.	pouces.	pieds.
1	8	18	0		30	180	88,0	3		791,0	78,2	1728
2	2	18	0		30	79	89,0	3		" "	" "	"
3	8	18	0		30	173	89,4	3		793,4	78,2	1638
4	2	18	0		30	90	90,2	3		794,5	78,3	847 d
5	2	18	0		30	103	89,2	3		795,7	78,3	981
6	2	18	0		30	99	87,7	4		796,9	78,3	961
7	8	18	0		30	177	86,8	4		798,1	78,3	1738
8	8	18	0		90	157	87,9	4		799,3	78,4	1527 d
9	2	18	0		90	95	88,7	4		800,4	78,4	917
10	8	18	0		90	165	91,9	3		801,6	78,4	1539 d
11	2	18	0		90	96	86,6	3		802,8	78,4	952
12	8	18	0		90	165	86,9	5		804,0	78,4	1632
13	2	18	0		90	93	84,9	4		805,2	78,5	934

Calcul des vitesses moyennes.

CHARGES DE 8 ONCES.		CHARGES DE 2 ONCES.	
	pieds.		pieds.
à 30.....	90	30.....	90
1728	d	d	917
1638	d	981	952
1738	1632	961	934
Vitesse moyenne.....	1702	971	934
Perte en traversant 60 pieds.....	70		37
ou de la vitesse, environ.....	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{28}$

La charge n° 2 n'a pas été bien mise dans la pièce.

La lettre d désigne les résultats douteux, et on les a omis dans les calculs. Le centre d'oscillation du pendule n'est pas dérangé lorsque les boulets frappent très près de ce centre, ou se logent à des distances égales, soit au-dessus ou au-dessous de ce centre. Avec une charge de 2 onces, la pénétration moyenne des balles, dans le pendule, était de 8,8 pouces.

128. 12 septembre 1787, depuis 10 heures jusqu'à 1 heure.

Temps sec.

Baromètre, 30,31.

Thermomètre, 57°.

NUMÉROS.	CHARGES.	POIDS		DISTANCE de la pièce au pendule.	VIBRATIONS du pendule.	DISTANCE du point frappé.	POIDS		VALEURS DE		VITESSES des BALLES.
		BALLES.	des				CHEVILLES.	P	G		
	onces.	onc.	dr.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces	pieds.	
1	8	18	0	150	153	89,2	4	806,3	78,5	1481 d	
2	2	18	1	150	93	88,1	2	807,5	78,5	909	
3	8	18	1	150	153	82,3	4	808,7	78,5	1603	
4	2	18	1	150	91	89,1	3	809,9	78,6	883	
5	8	18	1	150	152	87,5	4	811,1	78,6	1503	
6	2	18	1	150	94	88,6	3	812,2	78,6	920	
7	8	18	1	210	"	" "	"	" "	" "	"	
8	8	18	1	210	147	84,0	5	813,4	78,6	1519	
9	2	18	1	210	90	90,4	3	814,6	78,6	866	
10	8	18	1	210	142	86,0	4	815,8	78,7	1439	
11	2	18	1	210	75	" "	"	" "	" "	"	
12	2	18	2	210	89	87,3	4	817,0	78,7	887	
13	8	18	0	210	146	84,4	5	818,1	78,7	1519	
14	2	18	1	210	86	83,5	3	819,3	78,7	902	

CHARGES DE 8 ONCES.				CHARGES DE 2 ONCES.			
		pieds.				pieds.	
à 150.....		210		150.....		210	
d.....		1519		909		866	
1603		1439		883		887	
1503		1519		920		902	
Vitesse moyenne.....		1553.....		1492		904.....	
Perte en traversant 60 pieds.....		61.....		28			
ou de la vitesse, environ.....		$\frac{1}{25}$		$\frac{1}{32}$			

La balle n° 7 ayant rencontré l'arête d'une ferrure, a été rejetée de côté et n'a pas frappé le pendule. La balle n° 11 ayant frappé une bande de fer, a été mise en pièces. La balle n° 8 s'est enfoncée de $19\frac{1}{2}$ pouces dans le pendule.

129. 13 septembre 1787, depuis 10 heures jusqu'à 3 heures.

Temps sec.

Baromètre, 30,25. Thermomètre, 56°.

NUMÉROS.	CHARGES.	POIDS		DISTANCE de la pièce.	VIBRATIONS du pendule.	DISTANCE du point frappé.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSES des BALLES.
		des BALLES.	BALLES.					p	g	
onces.	onc. dr.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.		
1	8	17 15		300						
2	8	18 1		300	121	78,5	"	820,5	78,8	1354
3	8	18 1		300	152	92,6	8	821,7	78,8	1445
4	8	18 1		300	135	93,4	2	822,9	78,8	1273 d
5	8	18 2		300	"	"	"	"	"	"
6	8	18 2		300	121	79,9	3	824	78,8	1331 d
7	8	18 2		300	122	82,0	3	825,2	78,8	1310 d
8	8	18 1		300	135	89,3	2	826,4	78,9	1339 d
9	2	17 15		300	77	84,6	2	827,6	78,9	814 d
10	2	17 15		300	93	99,1	"	828,8	78,9	840
11	2	17 15		300	83	90,4	2	829,4	78,9	823
12	2	17 15		300	89	95,3	2	830,5	78,9	838
13	8	17 15		378	134	94,4	3	831,7	79,0	1277
14	2	17 15		378	85	95,0	3	832,9	79,0	806
15	8	17 15		378	"	"	"	834,0	79,0	"

CHARGES DE 8 ONCES.			CHARGES DE 2 ONCES.		
	pieds.			pieds.	
	à 300.....	378		300.....	378
Vitesse....	1400.....	1277		834.....	806
Perte.....		123			28.

Ainsi, en traversant 78 pieds dans l'air, le boulet perd, avec la forte charge, 123 pieds, ou la 11^e partie de sa vitesse; et avec la faible charge, la perte est de 28 pieds, ou la 30^e partie; mais il est probable que la vitesse 1277 du n° 13 est trop faible.

Les 5^e et 15^e coups ont manqué le pendule.

Le boulet n° 10 a frappé la barre de fer et s'est cassé en deux; un morceau est entré dans le pendule et l'autre a été rejeté en arrière de 3 à 4 pieds seulement.

Les expériences de ce jour étant finies, l'on a, comme au commencement, pesé et mesuré le pendule, et l'on a trouvé ce qui suit :

Distance du centre de gravité à l'axe.....	79	pouces,
ou $\frac{8}{10}$ de plus que la première fois.		
Nombre d'oscillations en 10 minutes.....	401	, comme la première fois.
Poids du pendule et de sa tige.....	834	livres.
Poids des 36 $\frac{1}{2}$ boulets enfoncés, à 18 onces chaque....	41	
Poids des chevilles.....	7 $\frac{1}{2}$	
Poids des boulets et des chevilles.....	48 $\frac{1}{2}$	
Ajouté au poids primitif du pendule et de sa tige, savoir.	791	
Fait.....	839 $\frac{1}{2}$.	

L'évaporation a donc diminué le poids de 5 $\frac{1}{2}$ livres en trois jours, le temps étant très sec.

130. 20 septembre 1787. Beau temps.

Le but des expériences était de connaître la résistance de l'air, en tirant, d'un petit mortier à la Cohorn, des boulets d'égal diamètre, mais de matière et de poids différens.

Diamètre de l'âme du mortier, 4 pouces 6 lignes; angle de tire, 45°.

NUMÉROS.	CHARGES.	BOULETS.		DURÉE du TRAJET.	DÉVIATION.	PORTÉES.	PORTÉES MOYENNES.	MATIÈRE du PROJECTILE.
		POIDS.	DIAMÈTRE.					
		onces.	liv. onc.	secondes.	pieds.	pieds.	pieds.	
1	1	14	4	4,43	»	259	256	Boulets creux remplis de plomb.
2	1	14	4	id.	»	255		
3	1	14	4	id.	»	254		
4	2	14	4	id.	30 d	870	870	
5	1	12	14	4,49	»	376	376	Boulets de fer.
6	1	12	14	id.	»	399		
7	1	12	14	id.	»	354		
8	2	12	14	id.	g 41	1068	1068	
9	1	8	12	4,43	»	342	365	Boulets creux remplis d'eau.
10	1	8	11	id.	»	345		
11	1	8	10	id.	»	409		
12	2	8	9	id.	48 d	1083	1083	
13	1	8	5 $\frac{1}{2}$	4,44	»	410	426	Boulets creux vides.
14	1	8	5 $\frac{1}{2}$	id.	»	432		
15	1	8	5 $\frac{1}{2}$	id.	»	435		
16	1	1	6	4,40	g 35	487	505	Boulets de chêne.
17	1	1	6	id.	61 d	460		
18	1	1	6	id.	8 d	567		
19	2	1	6	id.	»	perdu.		
20	1	0	7 $\frac{1}{4}$	id.	5 $\frac{1}{2}$	311	325	Boulets de papier blan- chis avec de la craie, pour marquer l'en- droit de la chute.
21	1	0	7 $\frac{1}{4}$	id.	5 d	364		
22	1	0	7 $\frac{1}{4}$	id.	g 80	300		
23	1	0	6 $\frac{1}{4}$	id.	g 58	366	403	Boulets de papier sans enduit.
24	1	0	6 $\frac{1}{4}$	id.	g 105	396		
25	1	0	6 $\frac{1}{4}$	id.	130 d	447		
26	2	0	7 $\frac{1}{4}$	id.	»	450	450	Idem avec enduit.

Pendant le trajet du boulet rempli d'eau, une once environ du liquide est passée à travers le bouchon de bois. A la charge d'une once de poudre, les déviations de droite (d) ou de gauche (g) étaient petites ou nulles pour les projectiles pesans, mais très grandes pour les projectiles légers.

Il paraît que l'air opposait une plus grande résistance aux boulets de papier, lorsque leur surface était rendue inégale au moyen de l'enduit.

On voit que dans le tir avec des boulets pesans, les portées sont plus que triplées avec une charge de poudre double.

131. *Résumé des expériences précédentes de 1787.*

En rassemblant les résultats moyens des expériences des 11, 12 et 13 septembre 1787, on obtient les tables ci-dessous des vitesses moyennes d'une balle de 18 onces et de 2 pouces de diamètre, tirée par la pièce n° 2, avec une charge de 8 onces et de 2 onces, le pendule étant placé à des distances qui forment la première colonne.

VITESSES trouvées par l'expérience.			VITESSES pour d'autres distances déduites des premières.		
DISTANCES.	VITESSES AVEC		DISTANCES.	VITESSES AVEC	
	8 onces.	2 onces.		8 onces.	2 onces.
0 pieds.	»	»	0	1740	990
30	1702	971	60	1667 ⁷³	953 ³⁷
90	1632 ⁷⁰	934 ³⁷	120	1597 ⁷⁰	919 ³⁴
150	1553 ⁷⁹	904 ³⁰	180	1530 ⁶⁷	888 ³¹
210	1492 ⁶¹	876 ²⁸	240	1466 ⁶⁴	859 ²⁹
300	1400 ⁹²	834 ⁴²	300	1404 ⁶²	832 ²⁷

Dans la première table, on voit les vitesses avec lesquelles les balles ont frappé le pendule placé aux distances consignées dans la première colonne; la deuxième colonne correspond à la charge de 8 onces de poudre, et la troisième colonne, à la charge de 2 onces de poudre. Dans la deuxième table, les distances croissent régulièrement de 60 pieds, et elles ont été déduites des premières par interpolation. Les nombres écrits en petits caractères entre les vitesses, sont les différences successives de ces vitesses, et conséquemment ces nombres indiquent les pertes de vitesse, de 60 pieds en 60 pieds, qu'éprouve le boulet, en traversant l'air.

Nous pouvons maintenant déterminer la grandeur de la résistance de l'air, correspondante à chaque perte de vitesse. A cet effet, soit S l'espace parcouru

par le boulet dans le temps T ; soit v la vitesse qui a lieu au milieu de cet espace, et v' la vitesse perdue pendant le temps T . Le poids du boulet étant pris pour unité, désignons par r le rapport de la résistance cherchée à ce poids; la pesanteur pendant le temps T engendre ou détruit la vitesse $32T$; donc on a la proportion $r : 1 :: v' : 32T$; d'où l'on tire $r = \frac{v'}{32T}$, mais l'on a à très peu près $T = \frac{S}{v}$, donc $r = \frac{v'}{32S}$, c'est-à-dire que la résistance est égale à $\frac{v'}{32S}$ fois le poids du boulet.

Substituant dans l'expression précédente de r , au lieu de S , sa valeur 60 de la deuxième table, et au lieu de v les valeurs moyennes entre les vitesses consécutives de la seconde table, et à la place de v' les différences interposées correspondantes, on formera les tables suivantes, où les résistances sont exprimées en onces, vis-à-vis des vitesses correspondantes.

CHARGES DE 8 ONCES DE POUDRE.			
Vitesses.	Résistances.	1 ^{re} différence.	2 ^e différence.
1702	1165 $\frac{1}{2}$		
1632	1071	94 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{1}{2}$
1563	982	89	5
1498	898	84	6
1435	820	78	

CHARGES DE 2 ONCES DE POUDRE.			
Vitesses.	Résistances.	1 ^{re} différence.	2 ^e différence.
972	328		
936	298 $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	2
904	271	27 $\frac{1}{2}$	2
873	245 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$
845	221 $\frac{1}{2}$	24	

EXPÉRIENCES DU PENDULE EN 1788.

Le but des expériences suivantes est de connaître la résistance de l'air et les vitesses perdues en tirant contre le pendule placé à différentes distances de la pièce, et de rattacher la série de ces résistances à celles qu'on a déduites des expériences faites cette année et les précédentes, à l'Académie, sur de petites vitesses, avec la machine de rotation.

132. 6 août 1788. Temps froid et couvert.

Baromètre, 30,17. Thermomètre, 64°.

NUMÉROS.	CHARGES.	POIDS	DISTANCE	VIBRATIONS	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSE
	de poudre.	des BALLES.	de la pièce.	du pendule.	du point frappé.	des CHEVILLES.	p	g	des BALLES.
	onces.	onc. dr.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.
1	2	16 9 $\frac{1}{2}$	30	73	86,7	1,3	862,0	79,0	840 d
2	2	" 10 $\frac{1}{2}$	"	79	89,2	2,4	863,2	"	882
3	2	" 10 $\frac{1}{2}$	"	79	89,1	2,5	864,3	"	884
4	2	" 13 $\frac{1}{2}$	"	80	91,4	2,1	865,5	"	864
5	8	" 9 $\frac{1}{2}$	"	144	92,0	3,0	866,6	"	1573 d
6	8	" 8 $\frac{1}{2}$	"	146	90,9	4,1	867,8	"	1620
7	8	" 10 $\frac{1}{2}$	"	143	91,4	3,6	869,0	"	1568
8	2	" 8 $\frac{1}{2}$	60	67	85,4	3,3	871,1	"	793
9	2	" 7 $\frac{1}{2}$	"	70	85,4	2,1	871,3	"	833
10	2	" 7	"	72	84,2	2,1	872,4	79,1	872
11	2	" 10	"	73	87,4	1,5	873,6	"	844
12	8	" 10 $\frac{1}{2}$	"	146	90,3	3,5	874,8	"	1633
13	8	" 9 $\frac{1}{2}$	"	138	90,4	3,0	875,9	"	1550
14	8	" 9 $\frac{1}{2}$	"	124	85,0	3,4	877,1	"	1483
15	8	" 8 $\frac{1}{2}$	"	133	88,8	2,6	878,2	"	1530
16	2	" 11	120	73	89,7	2,1	879,4	"	825
17	2	" 6 $\frac{1}{2}$	"	75	89,0	3,0	880,6	"	869
18	2	" 7 $\frac{1}{2}$	"	72	88,5	1,4	881,7	"	837
19	8	" 8 $\frac{1}{2}$	"	145	95,8	3,4	882,9	"	1555
20	8	" 15 $\frac{1}{2}$	"	140	90,3	4,1	884	"	1554
21	8	" 12 $\frac{1}{2}$	"	130	90,9	3,5	885,2	"	1450
22	8	" 6	"	128	90,0	4,5	886,4	"	1480

Outre ces vingt-deux coups, on en a tiré deux qui ont manqué le pendule.

En commençant les expériences de ce jour, le pendule pesait 862 livres. Le centre de gravité du pendule était à 79 pouces de l'axe de rotation, et l'on comptait $40 \frac{1}{2}$ nombre moyen d'oscillations par minute; la pièce était le n° 2; les boulets pesaient, poids moyen, 16^{onces} 10^{dr.}, et avaient 1,965 pouce de diamètre moyen. Calculant, à l'aide de la table, les moyennes vitesses correspondantes aux trois distances de 30, 60 et 120 pieds, et aux deux charges de 2 et 8 onces, on obtient les résultats suivans :

VITESSES MOYENNES.

DISTANCES.	VITESSES MOYENNES.	
	8 onces.	2 onces.
30	1587	877
60	1550	850
120	1510	844.

133. 7 août 1788. Temps froid et couvert.

Baromètre, 30,13. Thermomètre, 60°.

On a continué les expériences du jour précédent avec la même pièce n° 2, et les mêmes charges de 2 et de 8 onces; mais on a tiré à d'autres distances, savoir, à 180, 240 et 300 pieds de distance.

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	POIDS du BOULET.		DISTANCE de la pièce au pendule.	VIBRATIONS du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE du BOULET.
		onces.	onc. dr.					p	g	
				pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.
1	2	16	7 $\frac{1}{2}$	180	76	97,9	3,4	887,7	79,1	804
2	2	17	0	"	73	90,4	2,1	888,9	"	814
3	2	16	15	"	71	89,7	1,3	890,1	"	800
4	2	17	0	"	65	82,3	2,3	891,4	"	799
5	8	16	7	"	124	88,6	2,4	892,6	"	1458
6	8	17	0	"	135	93,3	4,2	893,8	"	1466
7	8	16	10	"	114	93,4	3,1	895,0	79,2	1264 d
8	8	16	7 $\frac{1}{2}$	"	133	96,4	2,7	896,3	"	1445
9	2	16	11 $\frac{1}{2}$	240	71	92,8	4,5	897,5	"	787
10	2	16	8	"	72	98,6	3,4	898,7	"	767
11	2	16	7	"	59	79,9	2,2	899,9	"	776
12	2	16	8	"	65	85,0	4,9	901,1	"	805
13	8	16	8	"	113	87,6	3,1	902,4	"	1360
14	8	16	14	"	121	90,2	3,4	903,6	"	1376
15	8	16	15	"	115	92,1	2,8	904,8	"	1283 d
16	8	16	13	"	106	84,5	3,0	906,0	"	1303 d
17	2	16	11	300	66	93,9	1,4	907,3	"	736 d
18	2	16	6	"	65	88,6	2,0	908,5	"	786
19	2	17	0	"	62	82,9	2,6	909,7	"	772

Outre ces dix-neuf coups, on en a tiré plusieurs autres, la plupart à 300 pieds de distance; on n'en a pas fait mention, parce qu'ils ont manqué le pendule.

En prenant les vitesses moyennes, on trouve les résultats suivans, le boulet pesant 16 onces 11,26 dr., poids moyen :

DISTANCES.	VITESSES MOYENNES.	
	8 onces.	2 onces.
180	1456	804
240	1368	784
300	"	765.

134. 9 août 1788. Temps froid et couvert.

Baromètre, 30,16. Thermomètre, 60°.

Continuation des mêmes expériences.

NUMÉROS.	CHARGES	POIDS		DISTANCE de la pièce au pendule.	VIBRATIONS du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE du BOULET.
	de poudre.	du BOULET.						P	g	
	onces.	onc. dr.	onces.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.
1	2	16 10 $\frac{1}{2}$		300	68	93,5	2,2	910,4	79,2	766
2	2	16 11		"	64	87,1	3,5	911,7	"	775
3	2	16 11		"	61	83,8	2,6	912,9	"	769
4	8	16 10		"	112	96,7	5,0	914,2	"	1225 d
5	8	16 10		"	108	86,9	2,4	915,4	"	1317
6	8	16 12		"	93	80,6	1,5	916,7	"	1224 d
7	8	16 11		"	108	92,3	2,6	917,9	79,3	1241
8	2	16 11		360	66	96,5	3,3	919,2	"	727
9	2	16 12		"	56	82,6	1,7	920,4	"	721
10	2	16 9		"	62	90,3	3,0	921,7	"	731
11	2	16 11		"	62	87,0	2,0	922,9	"	760
12	8	16 11		"	117	93,8	2,9	924,2	"	1332 d
13	8	16 10		"	95	80,0	2,7	925,4	"	1270
14	8	16 11		"	103	89,9	2,4	926,7	"	1227
15	8	16 9		"	87	82,2	3,0	927,9	"	1134 d

Outre ces quinze coups, on en a tiré un très grand nombre qui ont manqué le pendule.

Les moyennes vitesses déduites des tables sont ainsi qu'il suit, la balle pesant 16 onces 10 $\frac{2}{3}$ dr., poids moyen :

DISTANCES.	VITESSES MOYENNES.	
	8 onces.	2 onces.
300	1317	770
360	1276	735.

135. En rassemblant les résultats moyens des expériences faites les trois derniers jours, et omettant ceux qui sont évidemment irréguliers, on formera le tableau suivant :

DISTANCES.	CHARGES DE			
	2 ONCES.		8 ONCES.	
	Vitesses.	Différences.	Vitesses.	Différences.
30	877		1587	
60	850	27	1550	37
120	844	6	1510	40
180	804	40	1456	54
240	784	20	1368	88
300	765	19	1317	51
360	735	30	1276	41

Les différences font voir avec évidence que les vitesses suivent une marche qui ne s'écarte pas beaucoup de la régularité ordinaire des lois de la nature, et autant qu'on pouvait l'attendre de semblables expériences : il est donc permis de conclure que la vitesse du projectile à la bouche de la pièce était d'un peu plus de 880 pieds, avec la charge de 2 onces, et d'environ 1640 avec la charge de 8 onces.

En établissant la comparaison, on trouvera que les résultats de cette année sont plus petits que les résultats correspondans de l'année dernière : ce qui provient de ce que les projectiles de cette année avaient un plus grand vent, et peut-être aussi de ce que la poudre avait perdu de sa qualité depuis l'année dernière ; car on s'est servi de la poudre qui était restée.

En faisant quelques légers changemens dans les vitesses, on parvient facilement à les rendre tout-à-fait régulières et à former ainsi la table suivante :

Poids moyen du boulet, 16 onces $\frac{2}{3}$; diamètre, 1,965 pouce.

DISTANCES du PENDULE.	MOYENNES VITESSES.			A CHAQUE DISTANCE.		
	CHARGES DE 2 ONCES.			CHARGES DE 8 ONCES.		
	VITESSES.	VITESSES perdues.	Différence.	VITESSES.	VITESSES perdues.	Différences.
0	900	0	34	1637	0	74
60	866	34	32	1563	74	70
120	834	66	30	1493	144	66
180	804	96	28	1427	210	62
240	776	124	26	1365	272	59
300	750	150	24	1306	331	56
360	726	174		1250	387	

On obtient la colonne des vitesses perdues à chaque distance, en retranchant successivement les vitesses avec lesquelles le projectile choque le pendule, de la vitesse initiale, ou de celle qui a lieu à la bouche. Au moyen des formules données ci-dessus, n° 131, on forme la table suivante des résistances de l'air :

CHARGES DE 2 ONCES DE POUDRE.				CHARGES DE 8 ONCES DE POUDRE.			
Vitesses.	Résistances.			Vitesses.	Résistances.		
pieds.	onces.	1 ^{re} différence.	2 ^e différence.	pieds.	onces.	1 ^{re} différence.	2 ^e différence.
883	261	25		1600	1030	101	
850	236	23	2	1528	929	92	9
819	213	20	3	1460	837	85	7
790	193	17	3	1396	752	77	8
763	176	16	1	1336	675	66	11
738	160			1278	609		

136. 20 août 1788, depuis 9 heures jusqu'à 2 heures.

Baromètre, 29,80. Thermomètre, 64°.

On a commencé ce jour par des expériences avec la pièce n° 3; on s'est servi de charges très fortes et de quelques charges faibles, afin de déterminer les résistances correspondantes aux différentes vitesses. Comme on avait pris un nouveau bloc pour servir de pendule, on l'avait suspendu, pesé et mesuré deux jours auparavant: mais les expériences ont fait voir que le bois n'était pas sain; car les boulets tirés avec des charges de poudre de 16 et de 12 onces traversaient entièrement le pendule, quoiqu'il eût $30\frac{1}{4}$ de pouces d'épaisseur; la face antérieure avait 22 pouces de hauteur et $17\frac{1}{2}$ de largeur. Le poids du pendule, au moment de sa suspension, était de 824 livres; la distance de son centre de gravité à l'axe était de 79 pouces, et le pendule faisait 400 vibrations en 10 minutes. En mesurant les diamètres des boulets, on les a trouvés de 1,96 pouce à 1,97, ainsi le diamètre moyen est de 1,965. La pièce était placée, ce jour, constamment à 30 pieds du pendule.

Les boulets des expériences n°s 1, 3, 4 et 5 ont entièrement traversé le pendule et ont été s'enfoncer dans un tertre placé derrière; par cette raison, on a été obligé de discontinuer les tirs à fortes charges. Le n° 19 n'a fait que sortir juste, et le n° 22 est ressorti mais n'a pas été loin, de sorte qu'on n'a pas ajouté au poids du pendule, ni le poids de ces deux boulets, ni celui des boulets qui ont traversé le pendule ou qui ont été rejetés en arrière. Les boulets n°s 22, 23, 24 et 25, tirés avec 8 drachmes de poudre, se sont enfoncés de près de 3 pouces dans le pendule, et ceux des n°s 26, 27, 28 et 29, avec 4 drachmes, ont pénétré de plus d'un pouce et ont ensuite été rejetés en arrière, et sont venus tomber à 12 pieds du pendule, qu'ils avaient frappé à 4 pieds de hauteur environ. En combinant ces données avec les vitesses du choc, on peut en conclure que les boulets ont dû rebondir avec une vitesse d'environ 24 pieds par seconde, laquelle a été défalquée des vitesses déduites des vibrations du pendule répondantes à ces numéros.

NUMÉROS.	CHARGES.	POIDS		VIBRATIONS.	DISTANCE du point frappé.	POIDS		VALEURS DE		VITESSE du boulet.	VITESSES MOYENNES.
		du BOULET.				des CHEVILLES.		p	g		
	onc. dr.	p.			pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.	pieds.
1	16	16	11	188		4,0					
2	12	»	9	170	89,0	2,3	820,0	79,0		1837	
3	12	»	11	163	89,1	3,8					
4	12	»	12	141	87,8	2,7					
5	12	»	10	157	85,5	3,3					
6	4	»	11	124	90,1	2,9	821,1	79,0		1315	
7	4	»	6	120	85,7	3,9	822,2	»		1365	
8	4	»	12	121	85,6	3,2	823,3	»		1350	1346
9	4	»	10	122	86,9	2,9	824,4	»		1353	
10	3	»	12	108	87,9	2,9	825,5	»		1178	
11	3	»	11	110	87,2	3,1	826,6	79,1		1215	1185
12	3	»	9	113	86,1	3,0	827,7	»	d	1276	
13	3	»	9	106	88,7	3,3	828,8	»		1163	
14	1	»	9	57	89,6	2,7	829,9	»	d	620	
15	1	»	11	59	89,1	2,7	831,1	»		641	645
16	1	»	10	56	87,7	2,1	832,2	»	d	621	
17	1	»	14	60	87,5	1,3	833,3	»		658	
18	12 dr.	»	9	48	86,1	1,0	834,4	»		547	
19	12	»	13	51	86,5	2,0	835,5	»		569	546
20	12	»	9	47	88,4	1,0	835,5	»		522	
21	12	»	9	47	91,4	2,0	836,6	»	d	506	
22	8	»	12 $\frac{1}{2}$	39	89,8		837,7	»		421	
23	8	»	10	43	93,7		837,7	»		450	449
24	8	»	8	44	93,1		838,8	»		467	
25	8	»	9	43	93,0		839,9	79,2		457	
26	4	»	10	27	78,9		841,0	»		313	
27	4	»	9	30	81,8		841,0	»		339	309
28	4	»	10	30	81,2		841,0	»		340	
29	4	»	11	30	80,7		841,0	»		341	

30	4	»	12	30	80,0		841,0	»		341	
31	4	»	13	30	79,0		841,0	»		341	
32	4	»	14	30	78,0		841,0	»		341	
33	4	»	15	30	77,0		841,0	»		341	
34	4	»	16	30	76,0		841,0	»		341	
35	4	»	17	30	75,0		841,0	»		341	
36	4	»	18	30	74,0		841,0	»		341	
37	4	»	19	30	73,0		841,0	»		341	
38	4	»	20	30	72,0		841,0	»		341	
39	4	»	21	30	71,0		841,0	»		341	
40	4	»	22	30	70,0		841,0	»		341	
41	4	»	23	30	69,0		841,0	»		341	
42	4	»	24	30	68,0		841,0	»		341	
43	4	»	25	30	67,0		841,0	»		341	
44	4	»	26	30	66,0		841,0	»		341	
45	4	»	27	30	65,0		841,0	»		341	
46	4	»	28	30	64,0		841,0	»		341	
47	4	»	29	30	63,0		841,0	»		341	
48	4	»	30	30	62,0		841,0	»		341	
49	4	»	31	30	61,0		841,0	»		341	
50	4	»	32	30	60,0		841,0	»		341	
51	4	»	33	30	59,0		841,0	»		341	
52	4	»	34	30	58,0		841,0	»		341	
53	4	»	35	30	57,0		841,0	»		341	
54	4	»	36	30	56,0		841,0	»		341	
55	4	»	37	30	55,0		841,0	»		341	
56	4	»	38	30	54,0		841,0	»		341	
57	4	»	39	30	53,0		841,0	»		341	
58	4	»	40	30	52,0		841,0	»		341	
59	4	»	41	30	51,0		841,0	»		341	
60	4	»	42	30	50,0		841,0	»		341	
61	4	»	43	30	49,0		841,0	»		341	
62	4	»	44	30	48,0		841,0	»		341	
63	4	»	45	30	47,0		841,0	»		341	
64	4	»	46	30	46,0		841,0	»		341	
65	4	»	47	30	45,0		841,0	»		341	
66	4	»	48	30	44,0		841,0	»		341	
67	4	»	49	30	43,0		841,0	»		341	
68	4	»	50	30	42,0		841,0	»		341	
69	4	»	51	30	41,0		841,0	»		341	
70	4	»	52	30	40,0		841,0	»		341	
71	4	»	53	30	39,0		841,0	»		341	
72	4	»	54	30	38,0		841,0	»		341	
73	4	»	55	30	37,0		841,0	»		341	
74	4	»	56	30	36,0		841,0	»		341	
75	4	»	57	30	35,0		841,0	»		341	
76	4	»	58	30	34,0		841,0	»		341	
77	4	»	59	30	33,0		841,0	»		341	
78	4	»	60	30	32,0		841,0	»		341	
79	4	»	61	30	31,0		841,0	»		341	
80	4	»	62	30	30,0		841,0	»		341	
81	4	»	63	30	29,0		841,0	»		341	
82	4	»	64	30	28,0		841,0	»		341	
83	4	»	65	30	27,0		841,0	»		341	
84	4	»	66	30	26,0		841,0	»		341	
85	4	»	67	30	25,0		841,0	»		341	
86	4	»	68	30	24,0		841,0	»		341	
87	4	»	69	30	23,0		841,0	»		341	
88	4	»	70	30	22,0		841,0	»		341	
89	4	»	71	30	21,0		841,0	»		341	
90	4	»	72	30	20,0		841,0	»		341	
91	4	»	73	30	19,0		841,0	»		341	
92	4	»	74	30	18,0		841,0	»		341	
93	4	»	75	30	17,0		841,0	»		341	
94	4	»	76	30	16,0		841,0	»		341	
95	4	»	77	30	15,0		841,0	»		341	
96	4	»	78	30	14,0		841,0	»		341	
97	4	»	79	30	13,0		841,0	»		341	
98	4	»	80	30	12,0		841,0	»		341	
99	4	»	81	30	11,0		841,0	»		341	
100	4	»	82	30	10,0		841,0	»		341	
101	4	»	83	30	9,0		841,0	»		341	
102	4	»	84	30	8,0		841,0	»		341	
103	4	»	85	30	7,0		841,0	»		341	
104	4	»	86	30	6,0		841,0	»		341	
105	4	»	87	30	5,0		841,0	»		341	
106	4	»	88	30	4,0		841,0	»		341	
107	4	»	89	30	3,0		841,0	»		341	
108	4	»	90	30	2,0		841,0	»		341	
109	4	»	91	30	1,0		841,0	»		341	
110	4	»	92	30	0,0		841,0	»		341	
111	4	»	93	30	0,0		841,0	»		341	
112	4	»	94	30	0,0		841,0	»		341	
113	4	»	95	30	0,0		841,0	»		341	
114	4	»	96	30	0,0		841,0	»		341	
115	4	»	97	30	0,0		841,0	»		341	
116	4	»	98	30	0,0		841,0	»		341	
117	4	»	99	30	0,0		841,0	»		341	
118	4	»	100	30	0,0		841,0	»		341	
119	4	»	101	30	0,0		841,0	»		341	
120	4	»	102	30	0,0		841,0	»		341	
121	4	»	103	30	0,0		841,0	»		341	
122	4	»	104	30	0,0		841,0	»		341	
123	4	»	105	30	0,0		841,0	»		341	
124	4	»	106	30	0,0		841,0	»		341	
125	4	»	107	30	0,0		841,0	»		341	
126	4	»	108	30	0,0		841,0	»		341	
127	4	»	109	30	0,0		841,0	»		341	
128	4	»	110	30	0,0		841,0	»		341	
129	4	»	111	30	0,0		841,0	»		341	
130	4	»	112	30	0,0		841,0	»		341	
131	4	»	113	30	0,0		841,0	»		341	
132	4	»	114	30	0,0		841,0	»		341	
133	4	»	115	30	0,0		841,0	»		341	
134	4	»	116	30	0,0		841,0	»		341	
135	4	»	117	30	0,0		841,0	»		341	
136	4	»	118	30	0,0		841,0	»		341	
137	4	»	119	30	0,0		841,0	»		341	
138	4	»	120	30	0,0		841,0	»		341	
139	4	»	121	30	0,0		841,0	»		341	
140	4	»	122	30	0,0		841,0	»		341	

137. 21 août 1788, depuis 9 heures jusqu'à 4 heures.

Baromètre, 30,0.

Thermomètre, 65°.

Continuation.

NUMÉROS.	CHARGES.	DISTANCE		VIBRATIONS.	DISTANCE		POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE de la balle.	VITESSES MOYENNES.
		de la pièce.			du point frappé.			p	g		
	onc. dr.	pieds.	c.		pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.	pieds.
1	4	60	110		79,2	3,9	838,0	79,2		1363	
2	4	"	116		87,6	2,6	839,1	"		1306	
3	4	"	118		86,2	4,6	840,2	"		1323	
4	4	"	112		84,8	2,6	841,3	"		1301	
5	3	"	96		86,4	3,0	842,4	"		1088 d	
6	3	"	94		84,4	1,8	843,5	"		1092 d	
7	3	"	99		88,9	3,8	844,6	"		1102	
8	3	"	104		92,2	4,5	845,7	"		1118	
9	1	"	56		91,9	2,5	846,8	"		604 d	
10	1	"	52		88,6	2,6	847,9	"		583 d	
11	1	"	60		94,0	2,6	849,0	79,3		634	
12	1	"	61		93,8	3,4	850,1	"		637	
13	8	"	37		94,1	"	851,2	"		386 d	
14	8	"	39		91,9	"	852,3	"		421	
15	8	"	38		91,6	"	853,4	"		414	
16	8	"	40		92,5	"	854,5	"		433	
17	4	"	28		90,4	"	855,6	"		290	
18	4	"	23		82,7	"	855,6	"		259 d	
19	4	"	26		85,6	"	855,6	"		285	
20	4	"	25		87,1	"	855,6	"		269 d	
21	6	"	33		82,5	"	855,6	"		400	
22	6	"	33		83,6	"	856,7	"		376	
23	6	"	31		83,6	"	856,7	"		371	
24	6	"	31		84,3	"	857,8	"		363	
25	4	120	99		78,1	2,6	858,9	79,4		1263	
26	4	"	108		87,9	3,3	860,0	"		1240	
27	4	"	108		87,9	2,2	861,1	"		1237	
28	4	"	111		89,5	3,0	862,2	"		1250	
29	3	"	94		89,7	3,0	863,3	"		1068	
30	3	"	89		85,4	3,3	864,4	"		1058	
31	3	"	91		87,1	3,4	865,5	"		1057	
32	3	"	101		92,5	0	866,6	"		1106	
33	1	"	51		84,7	1,9	864,3	"		607	
34	1	"	54		86,1	3,1	865,4	"		628	
35	1	"	49		86,9	2,6	866,5	"		582	
36	1	"	52		88,5	2,5	867,7	"		603	
37	8	"	37		93,1	"	868,7	"		400	
38	8	"	38		89,3	"	869,8	"		433	
39	8	"	30		85,4	"	870,9	79,5		356 d	
40	8	"	34		80,3	"	872,0	"		436	
41	8	"	33		81,5	"	873,1	"		409	

Suite du Tableau précédent.

NUMÉROS.	CHARGES.	DISTANCE		DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSE	VITESSES
		de la	VIBRATION.	du point	des			de la	MOYENNES.
		pièce.		frappé.	CHEVILLES.	P	g	balle.	
	onc. dr.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
42	12	120	41	79,3	»	874,2	79,5	527	523
43	12	»	44	87,0	»	875,3	»	524	
44	12	»	47	87,2	»	876,4	»	555	
45	12	»	39	83,3	»	877,5	»	486	
46	6	»	30	87,3	»	878,6	»	354	356
47	6	»	34	95,6	»	879,7	»	310	
48	6	»	31	92,5	»	880,8	»	347	
49	6	»	35	87,0	»	881,9	»	414	
50	4	»	28	93,4	»	883,0	»	289	277
51	4	»	28	95,1	»	883,0	»	287	
52	4	»	27	84,4	»	883,0	»	306 d	
53	4	»	24	80,8	»	883,0	»	287	
54	12	60	41	79,4	1,3	883,0	»	534	544
55	12	»	45	81,6	»	884,1	79,6	571	
56	12	»	47	90,4	»	885,2	»	532	
57	12	»	47	90,4	»	886,3	»	538	

Les boulets n^{os} 17, 18, 19, 20, 50, 51, 52, 53, ont été la plupart rejetés en arrière.

Avec la charge de 6 drachmes de poudre, les boulets ont pénétré à $3\frac{1}{2}$ pouces environ de profondeur.

Le trente-deuxième coup a fait sortir trois balles du bloc.

Le boulet n^o 39 n'a fait que raser le pendule; ce qui a beaucoup diminué sa vitesse.

Le pendule étant maintenant rempli de boulets et entièrement dégradé, on a fait détacher le bloc pour en mettre un autre; au moment qu'on le descendait, il faisait $400\frac{1}{2}$ vibrations en 10 minutes; ce qui revient à peu près à 40,05 par minute. Après l'avoir descendu, on a trouvé que son centre de gravité était de 79,55 pouces au-dessous de l'axe, et que le pendule pesait $887\frac{1}{2}$; ainsi pendant ces deux jours,

Le poids des boulets logés dans le bloc était $66\frac{3}{4}$ livres.

Idem des chevilles $7\frac{3}{4}$.

Somme $74\frac{1}{2}$.

Cette somme retranchée de $887\frac{1}{2}$.

Seconde partie.

Il reste seulement.	813.
Mais le pendule pesait au commencement	824.
Perte pendant les quatre jours	11.

On a réparti cette perte également sur tous les résultats.

Le moyen poids des boulets était de 16 onces 11,05 drachmes, quelques-uns en avaient 1,2 ou 3 drachmes de plus ou de moins que ce poids moyen.

Lorsqu'on a ensuite fendu le bloc pour chercher les boulets, on a trouvé le bois très sain et très dur.

138. 1^{er} septembre 1788, depuis 10 heures jusqu'à 2 heures.

Baromètre, 29,87.

Thermomètre, 62°.

Les expériences précédentes ayant rapport à la résistance de l'air, ont été continuées avec un nouveau pendule. Ayant été suspendu 3 jours auparavant, son épaisseur était de 35 pouces d'avant en arrière.

Poids du pendule 1014 livres.

Distance de son centre de gravité à l'axe. 80,8 pouces.

Les vibrations étaient en 11 minutes de 439, ou bien 39,91 par minute.

NUMÉROS.	CHARGES.	POIDS de la		DISTANCE de la pièce.	VIBRATIONS	DISTANCE du point choqué à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE de la balle.	VITESSES moyennes.
		de la	BALLE.					p	g		
	onc. dr.	onc. dr.		pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	4	16	15	180	85	83,4	2,8	1014,0	80,8	1216	1182
2	4	»	10	»	85	89,1	2,5	5,1	»	1160	
3	4	»	10 $\frac{1}{2}$	»	89	92,5	2,3	6,4	»	1169	
4	4	»	10	»	82	86,9	2,7	7,4	»	1150 d	
5	3	»	14	»	75	86,5	2,7	8,6	»	1042	1053
6	3	»	12	»	75	84,7	»	9,7	»	1070	
7	3	»	8	»	74	86,5	3,0	20,9	»	1050	
8	3	»	11 $\frac{1}{2}$	»	79	88,8	3,0	2,0	»	1083	
9	1	»	11	»	46	90,3	2,0	3,2	»	622	612
10	1	»	12	»	41	81,7	0,5	4,3	»	611	
11	1	»	11	»	38	78,3	»	5,5	»	594	
12	1	»	9 $\frac{1}{2}$	»	40	79,1	»	6,6	»	623	
13	12	»	11	»	37 $\frac{1}{2}$	89,6	»	7,8	»	513	518
14	12	»	11	»	39	92,9	»	8,9	80,9	516	
15	12	»	10	»	37	90,2	»	30,1	»	507	
16	12	»	10	»	36	83,1	»	1,3	»	536	
17	8	»	10	»	33	92,4	»	2,4	»	442 d	407
18	8	»	14	»	28	86,9	0,2	2,4	»	393	
19	8	»	13	»	30	90,4	»	3,6	»	407	
20	8	»	12	»	32	93,5	»	4,7	»	421	
21	6	»	11	»	28	92,5	»	5,9	»	375	359
22	6	»	10	180	24	86,7	»	1034,7	»	344	

Les boulets n^{os} 17 et 22 rejaillirent légèrement ;

Le boulet n^o 21 passa facilement à travers le pendule et fit sortir encore un autre boulet qui y était logé.

Pénétration moyenne.

Avec les charges de 4 onces de poudre 13 pouces.
 3 *idem* 10,9.
 1 *idem* 3,5.
 12 drachmes 2,8.

Ainsi les pénétrations sont à peu près proportionnelles aux charges de poudre.

A la fin des expériences de ce jour, on a retiré du bloc 2 livres 10 onces de boulets cassés. On a trouvé que le bois était très vert et humide, au point que l'eau en sortait de tous côtés à mesure que les boulets s'y enfonçaient. Le

moyen poids des boulets était de 16 onces 11,2 drachmes avec quelques légères variations.

139. 2 septembre 1788. Continuation des expériences.

Baromètre, 30.

Thermomètre, 65°.

NUMÉROS.	CHARGES		DISTANCE	VIBRATIONS	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSE	VITESSES MOYENNES.
	de	de la	de la	du	du point	des	P	G	de la	
	poudre.	pièce.		pendule.	frappé.	CHEVILLES.			balle.	
	onc.	dr.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	»	6	180	26	87,0	»	1032,2	80,9	370	372
2	»	6	180	29 $\frac{1}{2}$	96,3	»	3,3	»	375	
3	4		240	77	84,6	3,3	3,3	»	1120	
4	4		»	77	86,6	2,5	4,5	»	1115	1129
5	4		»	86	94,9	2,9	5,6	»	1117	
6	4		»	87	92,1	3,8	6,8	»	1165	
7	3		»	74	86,8	2,1	7,9	»	969	1008
8	3		»	70	86,7	3,7	9,1	»	928	
9	3		»	72	85,4	4,0	40,2	»	1056	
10	3		»	72	83,8	1,5	0,2	»	1079	602
11	1		»	37	80,8	2,0	1,4	»	568	
12	1		»	43	85,1	»	2,5	»	622	
13	1		»	39	80,0	»	3,7	»	608	602
14	1		»	43	86,8	»	1043,7	»	610	

140. 3 septembre 1788. Continuation des mêmes expériences.

Baromètre, 30. Thermomètre, 65°.

NUMÉROS.	CHARGES		DISTANCE	VIBRATIONS	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSE	VITESSES MOYENNES.
	de	de la	de la	du	du	des	p	g	de la	
	poudre.	pièce.	pièce.	pendule.	point frappé à l'axe.	CHEVILLES.			balle.	
	onc. dr.	pièds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pièds.		pièds.
1	4 "	300	83	95,8	4,7	1044,8	80,9	1086		
2	4 "	"	76	87,3	3,2	6,0	9	1076		
3	4 "	"	80	94,5	4,6	7,1	81,0	1069		1077
4	4 "	"	72	82,9	4,1	8,3	"	1077		
5	3 "	"	66	87,5	4,1	9,4	"	947		
6	3 "	"	72	94,8	5,5	50,6	"	951		956
7	3 "	"	63	81,7	4,0	1,7	"	970		
8	3 "	"	59	79,5	3,0	2,9	"	938 d		
9	4 "	360	70	83,6	5,4	4,0	"	1050		
10	4 "	"	71	87,9	6,5	5,2	"	1008 d		
11	4 "	"	79	95,0	6,1	6,3	"	1040		1034
12	4 "	"	75	91,7	4,4	7,5	"	1040		
13	3 "	"	63	88,9	3,4	8,6	"	894		
14	3 "	"	60	81,1	4,5	9,8	"	954		
15	3 "	"	63	85,0	3,4	60,9	"	934		936
16	3 "	"	65	87,5	3,2	1062,1	"	962		

Les boulets 12 et 14 ont effleuré légèrement le pendule avant de le frapper.

La veille, trois boulets furent chassés du bloc, savoir, les n^{os} 2, 9 et 13. Après les expériences de ce jour, on recouvrit de feuilles de plomb les faces antérieures et postérieures du bloc. Chacune avait en surface 22 $\frac{1}{2}$ pouces sur 17 $\frac{1}{4}$ de pouces; les deux feuilles pesaient ensemble 41 livres. Le poids moyen des balles, pendant ces deux derniers jours, était de 10 onces 11 $\frac{7}{30}$ drachmes, à quelques légères différences près.

141. 4 septembre 1788, depuis 10 heures jusqu'à 3 heures.

Continuation des expériences.

Baromètre, 29,82.

Thermomètre, 72°.

NUMÉROS.	CHARGES	DISTANCE	OSCILLAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSE	VITESSES MOYENNES.
	de poudre.	de la pièce.	du pendule.	du point frappé à l'axe.	des CHEVILLES.	p	g	des balles.	
	onces.	pieds.	r.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	16	360	92	82,8	"	1104,2	81,2	1483	1582
2	16	"	105	83,1	5,2	5,4	"	1681	
3	16	"	97	90,0	6,3	6,5	"	1425 d	
4	16	"	97	91,0	6,9	7,7	"	1416 d	
5	12	"	89	80,5	4,8	8,8	"	1476	1492
6	12	"	107	95,0	9,5	10,0	"	1512	
7	12	"	105	93,7	6,5	1,1	"	1487	
8	12	"	95	90,6	8,9	2,3	"	1414 d	
9	16	300	109	89,9	11,7	3,4	"	1613	1648
10	16	"	99	85,4	4,0	4,6	"	1522 d	
11	16	"	102	83,6	7,8	5,7	"	1645	
12	16	"	104	81,7	11,0	6,9	"	1685	
13	12	"	101	82,3	9,1	8,0	"	1652	1572
14	12	"	75	"	"	9,2	"	"	
15	12	"	110	92,0	5,8	20,3	"	1584	
16	12	"	92	81,5	6,9	1,5	"	1530	
17	12	"	93	82,3	5,2	2,6	"	1521	1713
18	16	240	106	81,4	8,3	3,8	"	1781	
19	16	"	111	91,4	7,0	4,9	"	1645	
20	16	"	92 d	89,2	8,4	6,1	"	1404 d	
21	16	"	86 d	82,9	8,8	7,2	"	1397 d	1524 d
22	16	"	92 d	81,4	9,9	1128,4	"	1524 d	

Le boulet n° 14 a effleuré l'écrou, au douzième coup; la lumière du canon a commencé à couler ou à fondre, et vers la fin elle était extrêmement élargie. Les trois derniers coups sont incertains et donnent évidemment des résultats trop faibles; peut-être qu'il faut en chercher la cause dans le changement de direction des boulets, rencontrant d'autres, déjà logés dans le bloc.

Les boulets pesaient 16 onces 10,86 drachmes, poids moyen. Après ces expériences, le pendule faisait 399 oscillations en 10 minutes; étant alors rempli de boulets et extrêmement fracassé, on s'est occupé de le peser et de le mesurer; on a trouvé qu'il pesait 1130 livres, et la distance de son centre de gravité à l'axe était de 81,2 pouces.

Le poids des 74 boulets s'élève à	77 livres.
De ces boulets ont été repoussés en arrière et jetés dehors $9\frac{1}{2}$ pesant	10
Poids des boulets restans.	67
<i>Idem</i> des chevilles	8
<i>Idem</i> des feuilles de plomb	41
Poids primitif du pendule	1014
Poids final du pendule	1130.

142. 15 septembre 1788, depuis 10 heures jusqu'à 3 $\frac{1}{2}$ heures.

Baromètre, 30,09.

Thermomètre, 60°.

NUMÉROS.	CHARGES	DISTANCE	OSCILLAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSE	VITESSES MOYENNES.
	de poudre.	de la pièce au pendule.	du pendule.	du point frappé à l'axe.	des CHEVILLES.	p	g	du boulet.	
	onces.	pieds.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	16	30	100	89,6	10	1370	81,1	1855 d	2088
2	"	"	112	88,5	8	1	" "	2100	
3	"	"	118	90,6	8	3	" "	2143	
4	"	"	115	87,7	9	4	" "	2202	
5	"	"	108	84,8	14	6	" "	2133	
6	"	"	105	83,8	17	7	" "	2093	
7	"	60	92	80,4	12	9	" "	1929 d	1974
8	"	"	98	81,9	7	80	" "	2040	
9	"	"	106	89,8	16	2	81,2	2010	
10	"	"	105	91,9	14	3	" "	1920 d	
11	"	"	107	91,9	15	5	" "	1973	
12	"	120	103	91,0	14	6	" "	1899	1896
13	"	"	102	83,4	14	8	" "	2071 d	
14	"	"	98	86,1	16	9	" "	1935	
15	"	"	"	"	8	91	" "	"	
16	"	"	96	88,4	16	2	" "	1839	
17	"	"	97	85,5	9	4	" "	1913	1781
18	"	180	95	88,1	8	5	" "	1825	
19	"	"	88	90,9	13	7	" "	1643 d	
20	"	"	101	91,2	14	8	" "	1855	
21	"	"	105	90,1	15	1400	" "	1953	
22	"	"	92	94,5	11	1	" "	1653 d	
23	"	"	87	85,7	11	3	81,3	1745	1741
24	"	"	77	87,7	10	4	" "	1507 d	
25	"	"	88	84,8	10	6	" "	1792	
26	"	240	92	88,0	13	7	" "	1808	
27	"	"	88	91,4	11	9	" "	1643	
28	"	"	95	89,2	7	10	" "	1819	
29	"	"	83	87,8	9	2	" "	1623	1741
30	"	"	96	89,6	7	1413	" "	1815	

On a fait ces expériences avec un nouveau pendule ayant 50 pouces d'épaisseur, composé de deux pièces de bois solidement réunies et chevillées ensemble, de manière à pouvoir résister à la forte charge de 16 onces de poudre : on l'avait suspendu deux jours auparavant et il pesait alors 1377 livres, et son centre de gravité était à 81,3 pouces de l'axe. Le pendule a fait ce matin 395 oscillations en 10 minutes, ou 39,5 oscillations par minute; à la fin des expériences, les oscillations étaient les mêmes, mais le centre de gravité s'est trouvé à 81,1 pouces de l'axe, et à 0,2 pouce plus haut qu'au commencement, tandis qu'il aurait dû au contraire s'abaisser : dans le doute, nous avons pris 81,2 pour la distance moyenne. Les boulets logés dans le pendule étaient au nombre de 30, pesant ensemble $31 \frac{1}{4}$ livres, ce qui fait 16 onces 10,7 drachmes par boulet. Leur moyen diamètre était 1,96 pouce.

Poids des boulets.....	$31 \frac{1}{4}$ livres.
<i>Idem</i> des chevilles.....	$21 \frac{1}{2}$
<i>Idem</i> primitif du pendule.....	1377
Somme.....	<u>1429 $\frac{3}{4}$</u>
Poids à la fin des expériences.....	1413
Perte.....	<u>16 $\frac{3}{4}$.</u>

Il nous importe de rendre raison de cette grande perte, d'autant plus que le pendule précédent n'en a éprouvé aucune, quoique le bois en fût vert et très humide et qu'il eût été suspendu 3 jours avant les expériences, et qu'en outre les boulets eussent détaché plusieurs morceaux de bois et même des feuilles de plomb qui le couvraient; cela nous donne lieu de croire qu'il s'est glissé une erreur de quelques livres dans l'évaluation du poids primitif du pendule; par cette raison, nous avons pris 1370 livres pour le poids primitif et 1415 pour le poids du pendule à la fin des expériences, et nous avons réparti la différence 45, également entre tous les 30 coups. Pendant les 7 jours d'expériences, le poids moyen des boulets était de 16 onces 10,88 drachmes = 16,68 onces. Sachant que le boulet de 2 pouces de diamètre pèse

18 onces, on aura la proportion $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{16,68} :: 2 : 1,95$, et le 4^e terme 1,96 pouce est le diamètre des boulets pesant 16,68 onces, ou 1,965 pouce diamètre moyen.

11	7,38	74	"	"	82
01	7,58	88	"	"	10
80	8,18	88	"	"	50
80	8,88	80	0,88	"	80
80	9,10	88	"	"	70
01	9,98	80	"	"	80
8	8,78	88	"	"	00
81	9,08	80	"	"	08

143. 25 septembre 1788. Baromètre, 30. Thermomètre, 57°.

Expériences avec des pièces de 3.

NUMÉROS.	CHARGES	POIDS	DISTANCE	OSCILLATIONS.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	PÉNÉTRATION.	VALEURS DE		VITESSE du boulet.
	de poudre.	des BOULETS.	de la pièce.				p	g	
	onces.	onc. dr.	pieds.	c.	pouces.	pouces.	livres.	pouces.	pieds.
1	4	49 4	60	101	83,8	7 $\frac{1}{4}$	1421,0	82,10	710
2	4	"	"	125	95,5	9 $\frac{3}{4}$	24,5	12	773
3	4	"	"	103	87,7	8	27,9	14	695
4	4	"	"	117	90,1	10	31,4	16	771
5	4	"	"	101	83,5	7	34,8	17	720
6	4	"	"	121	90,5	11 $\frac{1}{4}$	38,3	19	798
7	16	"	"	243	90,1	11 $\frac{1}{2}$	41,8	21	1614
8	16	"	"	191	84,6	10	45,2	22	1354
9	16	"	"	234	89,1	10	48,7	24	1580
10	16	"	"	197	88,6	10	52,1	26	1341
11	16	"	"	238	91,4	10	55,6	28	1574
12	16	"	"	180	83,9	10	59,1	29	1300

Ces expériences ont été faites avec deux pièces de 3 de bronze, dont l'une très longue et l'autre courte; on a tiré alternativement avec les deux pièces, d'abord avec la pièce longue et ensuite avec la courte, et chacune avec deux charges de 4 onces et de 16 onces de poudre, afin de trouver l'influence qu'exercent la longueur des pièces et le poids de la charge.

Les boulets avaient tous exactement le même poids et le même diamètre, savoir :

Poids des boulets..... 3 livres 1 once 4 drachmes.

Diamètre d'*idem*..... 2,84 pouces.

Longueur d'âme de la pièce longue..... 69 pouces.

Idem de la pièce courte..... 34 $\frac{1}{2}$.

Distance de la pièce au pendule..... 60 pieds.

Poids du pendule, 6 jours avant les expériences.. 1426 livres.

Distance du centre de gravité à l'axe..... 81,75 pouces.

Nombre de vibrations à la même époque..... 397 en 10 minutes.

Poids du pendule après les expériences..... 1462 $\frac{1}{2}$ livres.

Centre de gravité à cette époque..... 82,63.

Vibrations à la même époque..... 396 en 10 minutes.

VITESSES MOYENNES.

Pièce courte.		Pièce longue.	
4 onces.	16 onces.	4 onces.	16 onces.
708	1332	781	1589
Poids du pendule, six jours avant les expériences.....			1426
Poids des boulets entrés dans le pendule.....			37
Idem des chevilles.....			4 $\frac{1}{2}$
Total.....			1467 $\frac{1}{2}$
Poids du pendule à la fin des expériences.....			1462 $\frac{1}{2}$
Perte en six jours.....			5.

Les 41 $\frac{1}{2}$ livres, poids des boulets et des chevilles, ne pouvant déplacer le centre de gravité que de $\frac{2}{10}$ de pouce, il doit s'être glissé quelque erreur dans les mesures des distances du centre de gravité à l'axe. Nous avons donc cru convenable de prendre la moyenne entre ces distances. Il paraît que les vitesses sont à peu près proportionnelles aux racines carrées des charges, mais plus sensiblement dans la pièce longue que dans la courte. La pièce longue a sur la courte un avantage de $\frac{1}{10}$ de vitesse pour les charges faibles, et de $\frac{2}{5}$ pour les charges fortes, de sorte que ces avantages sont proportionnels aux vitesses ou aux racines carrées des charges.

Avec la charge de 4 onces de poudre, les moyennes pénétrations étaient de 7 $\frac{1}{2}$ pouces pour la pièce courte et 10 pouces pour la pièce longue, ou à très peu près comme 2 : 3, rapport qui approche des *quatrièmes puissances des vitesses*, ou comme les racines carrées des longueurs environ.

144. Il est maintenant convenable de présenter le sommaire des expériences faites pendant les 7 derniers jours avec la pièce de 1 livre de balle et avec la pièce n° 3; ces expériences ont été faites avec les 9 charges de poudre suivantes, 16, 12, 4, 3, 1 onces, 12, 8, 6, 4 drachmes. Comme on a fait l'année dernière en 1787, un nombre considérable d'expériences avec les charges de 8 onces et de 2 onces, on ne les a pas reprises cette année-ci. Les moyennes vitesses avec lesquelles les boulets ont frappé le pendule aux distances de 30, 60, 120, 180, 240, 360 pieds sont consignées sous les charges respectives et à côté de leurs distances dans la table suivante.

Poids du pendule après les expériences..... 1462 $\frac{1}{2}$ livres.
Centre de gravité à cette époque..... 82,63.
Vibrations à la même époque..... 306 en 10 minutes.

Table des moyennes vitesses déterminées par expériences.

DISTANC.	16 ONCES.	12 ONCES.	4 ONCES.	1 ONCE.	3 ONCES.	12 DR.	8 DR.	6 DR.	4 DR.
pieds.									
30	2088	1837	1346	645	1185	546	449	"	309
60	1974	"	1324	635	1110	544	423	378	287
120	1896	"	1248	613	1072	523	419	356	277
180	1781	"	1182	612	1053	518	407	359	"
240	1727	"	1129	602	1008	"	"	"	"
300	1648	1572	1077	"	956	"	"	"	"
360	1582	1492	1034	"	936	"	"	"	"

On remarquera dans cette table quelques irrégularités dans la suite des vitesses, que la nature du sujet rendait inévitables. Par de légères corrections faites en ajoutant ou en retranchant quelque chose de ces vitesses, il est aisé de rétablir une régularité et de faire commencer la table à 0 de distance, et croître les distances successivement de 60 pieds : on obtient ainsi la table suivante.

Table des moyennes vitesses régulières.

DISTANC.	16 ONCES.	12 ONCES.	4 ONCES.	3 ONCES.	1 ONCE.	12 DR.	8 DR.	6 DR.	4 DR.
pieds.									
0	2100	1984	1360	1203	662	557	450	"	302
60	2005	"	1300	1151	641	543	437	381	292
120	1914	"	1243	1102	622	530	425	370	283
180	1827	"	1189	1056	606	518	414	360	"
240	1744	"	1138	1013	590	"	"	"	"
300	1665	1569	1090	973	"	"	"	"	"
360	1590	1499	1045	936	"	"	"	"	"

Faisant usage de la formule $r = \frac{vv'b}{32s} = \frac{vv'b}{1920}$, trouvée au n° 131, pour calculer la résistance de l'air, on obtiendra la table suivante de ces résistances exprimées en onces et correspondantes à des vitesses exprimées en pieds et aux charges respectives de 16 onces, 8 onces, 4 onces, 3 onces, 1 once, 12 drachmes, 8 drachmes, 6 drachmes, 4 drachmes, tout étant réduit et adapté à un boulet de 2 pouces de diamètre et à une pression atmosphérique équivalente à 30 pouces de mercure. Dans cette formule, b désigne le poids du boulet.

VITESSE.		RÉSISTANCE.	1 ^{re} DIFFÉR.	2 ^e DIFF.	VITESSE.		RÉSISTANCE.	1 ^{re} DIFFÉR.	2 ^e DIFF.
	pieds.	onces.				pieds.	onces.		
4 dr.	287	22	3		3 onces.	955	306	38	
	297	25				993	344	42	4
6 dr.	365	32	4			1035	386	45	3
	376	36				1079	431	49	4
8 dr.	420	40	5			1127	480	52	3
	432	45		1		1177	532		
	444	51			4 onces.	1068	418	47	
12 dr.	524	55	6			1114	465	51	4
	537	61		0		1164	516	55	4
	550	67				1216	571	59	4
1 once.	598	78	13			1272	630	63	4
	614	91		1	8 onces.	1330	693		
	632	105		1		1278	609	68	
	652	120				1336	677	76	8
2 onces.	738	160	16			1396	753	84	8
	763	176		2		1460	837	92	8
	790	194		2		1528	929	101	9
	819	214		2	16 onces.	1600	1030		
	850	236		3		1627	1060	110	
	883	261				1705	1170	118	8
						1786	1288	127	9
						1872	1415	135	8
						1960	1550	144	9
						2053	1694		

Ces nombres, quoique peu réguliers, ne peuvent pourtant pas s'écarter beaucoup de la vérité, à en juger par les deux colonnes de différences qui sont assez régulières en prenant les charges isolément, et laissent seulement quelque chose à désirer sur l'uniformité en passant d'une charge de poudre à la suivante. Nous éclaircirons ce doute plus loin, lorsque nous nous occuperons de la construction de la courbe des résistances par le moyen de ces nombres. Il aurait été facile, par des interpolations, de multiplier ces résultats, mais on a cru suffisant de ne prendre que les vitesses que le boulet atteint au milieu des intervalles respectifs qui existent entre la pièce et le pendule, intervalles qui étaient successivement de 0, 60, 120, 180, 240, 360 pieds. On n'a pu trouver moyen de tirer à une distance plus grande que 360 pieds, à cause de l'incertitude du tir. Plusieurs boulets manquaient le pendule, et d'autres allaient frapper et briser les liens de fer, et mettaient ainsi l'appareil

hors de service. Il n'a pas été possible non plus de se servir d'une charge au-dessous de 4 drachmes, parce qu'avec la vitesse qu'elle donne au boulet, il n'a pas la force de s'enfoncer dans le bois, mais y pratique seulement une légère excavation et rebondit ensuite en arrière. Cependant pour rattacher ces résistances à celles qui répondent à de plus petites vitesses, nous avons entrepris une suite d'expériences avec la machine de rotation de M. Robins, et que nous rapporterons plus loin. Outre le petit nombre d'irrégularités qu'on a fait remarquer plus haut, la détermination de v dans la formule $r = \frac{vv'}{1920} b$, et qu'on considère toujours comme une vitesse moyenne entre les vitesses extrêmes, peut occasionner une légère inexactitude dans les résultats.

145. Pour examiner maintenant jusqu'à quel point les résultats de la table précédente approchent de l'uniformité, nous allons construire la courbe dite des résistances, en prenant pour abscisses les nombres qui expriment les résistances et pour ordonnées les nombres qui désignent les vitesses. Tirez deux droites indéfinies à angle droit, portez sur l'une d'elles les vitesses en parties d'une échelle prise à volonté; portez de même les résistances correspondantes sur l'autre droite; par chacun de ces points ainsi déterminés, menez des droites respectivement parallèles aux deux axes, le point d'intersection de ces parallèles est un point de la courbe des résistances, et on fera passer la courbe par tous ces points, ou à la main, si on est exercé, ou au moyen d'un morceau de carton mince et flexible. On obtiendra ainsi facilement une courbe qui ne différera que d'une manière imperceptible de la véritable courbe donnée par l'expérience.

Au moyen de cette courbe continue, et en mesurant ses coordonnées, nous obtiendrons une série de résistances correspondantes à une série de vitesses, plus exactement que par l'expérience. A cet effet, portons sur l'axe des vitesses, des distances égales entre elles, de 50 ou de 100 pieds chacune; menant ensuite par les points de division des droites parallèles à l'axe des résistances, et prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent la courbe; les longueurs de ces parallèles seront les résistances correspondantes. La table ci-jointe a été dressée au moyen de ces parallèles, qu'on a mesurées avec une grande exactitude; elle est relative à un boulet de 2 pouces de diamètre.

VITESSE.	RÉSISTANCE.	1 ^{re} DIFFÉRENCE.	2 ^e DIFFÉRENCE.
300	25,8		
400	46,5	20,7	7,2
500	74,4	27,9	8,2
600	110,5	36,1	9,4
700	156,0	45,5	10,5
800	212,0	56,0	12,3
900	280,3	68,3	13,4
1000	362,0	81,7	13,2
1100	456,9	94,9	12,6
1200	564,4	107,5	11,4
1300	683,3	118,9	9,3
1400	811,5	128,2	7,4
1500	947,1	135,6	4,2
1600	1086,9	139,8	1,7
1700	1228,4	141,5	—1,3
1800	1368,6	140,2	—3,1
1900	1505,7	137,1	—5,0
2000	1637,8	132,1	

Cette table met à même de trouver, soit par inspection, soit par interpolation, les résistances correspondantes à une vitesse donnée, non-seulement pour le boulet de 2 pouces de diamètre, mais aussi pour un boulet de diamètre quelconque, en supposant les résistances proportionnelles aux carrés des diamètres; ce qui est assez approchant de la vérité. On appréciera mieux les autres propriétés et usages de cette table, après avoir pris connaissance des expériences ultérieures que nous allons rapporter (1).

EXPÉRIENCES DE 1789.

146. Les expériences projetées pour cette année étaient de différente nature. Outre la continuation des expériences précédentes, on voulait aussi connaître les portées des canons et mortiers en tirant ces pièces sous divers angles contre le pendule.

Le petit nombre de boulets de 3 livres qu'on avait tirés à la fin des expériences de l'année précédente, ont fait espérer qu'on pourrait rendre l'instrument capable de supporter le choc de ces boulets et même de boulets plus considérables par une suffisante augmentation dans les dimensions du bloc. On s'est donc décidé à continuer les expériences de 1788, avec des boulets de

(1) On n'a pas jugé nécessaire de copier la courbe donnée par l'auteur.

3 livres et au-delà ; on prit à cet effet deux blocs en bois, on les réunit solidement par des bandes de fer ; le tout pesant au plus un tonneau.

On prépara deux pièces de 3, l'une longue et l'autre courte, exactement de même calibre et parfaitement semblables, ayant chacune une petite chambre hémisphérique au fond de l'âme ; le diamètre de l'âme était de 2,94 pour les deux, et la longueur de l'âme était, pour la longue, de $69\frac{1}{4}$, et pour la courte, de 40 pouces.

Le principal objet des expériences de cette année était de connaître la résistance de l'air au moyen des pertes de vitesses des projectiles qui le traversent, et de connaître aussi les portées des pièces sous divers angles ; on avait aussi en vue, dans ces expériences, plusieurs objets accessoires.

Afin de connaître l'effet de la température sur la force de la poudre et sur la résistance de l'air, on observa chaque fois l'état du baromètre et du thermomètre. Pendant toutes ces expériences, la poudre était renfermée dans un petit sachet de flanelle bien mince, et on l'éprouvait chaque fois avec une éprouvette de nouvelle invention, dont l'exactitude est telle, qu'on peut reconnaître les moindres variations dans la force de la poudre.

147. 13 et 14 octobre 1789.

Les deux premiers jours se passèrent à peser, à mesurer, à balancer et à suspendre le premier nouveau pendule : il était d'un bon bois d'orme bien sec ; il avait 54 pouces d'épaisseur, 24 de hauteur et de 18 de largeur ; on tirait les boulets comme à l'ordinaire dans la direction des fibres du bois, d'abord vers un bout et puis vers l'autre.

Le pendule pesait avec sa tige 1655 livres, le centre de gravité était à 77,3 pouces au-dessous de l'axe de suspension ; il faisait 399 vibrations en 10 minutes, ce qui donne $n = 39,9$ ou 40 à peu près.

148. 19 octobre 1789. Temps couvert.

Baromètre 29,64. Thermomètre.

On a tiré, ce jour seulement, 6 coups, savoir : les trois premiers avec la pièce courte, et les trois derniers avec la pièce longue ; la bouche de la pièce était à 30 pieds de la face antérieure du pendule.

Charge de poudre.....16 onces,
 Poids de chaque boulet...2 livres 15 onces,
 Diamètre des boulets....2,78 pouces.

NUMÉROS.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	PÉNÉTRATION.	VALEURS DE		VITESSES MOYENNES.
					P	g	
		pouces.	onces.	pouces.	livres.	pouces.	pieds.
1	184	91,0	"	23,6	1655	77,3	1371
2	181	89,4	10	"	58	3	
3	178	86,3	10	"	60	3	
4	212	89,7	7	"	63	4	1584
5	200	86,9	5	29,3	66	4	
6	201	85,7	4½	"	1669	77,4	

149. 20 octobre 1789. Beau temps.

Baromètre, 29,82.

On a tiré les trois premiers coups avec la pièce courte solidement assujettie par la culasse, pour l'empêcher de reculer, afin de connaître l'effet que cet obstacle pourrait produire sur la vitesse. Les autres coups ont été tirés avec la pièce longue placée à différentes distances du pendule et ayant toute liberté de reculer. Dans ces expériences, ainsi que dans les suivantes, on a toujours fait usage de mon éprouvette, dont je donnerai plus bas la description : la poudre marquait à cette éprouvette 30, 35, 32, moyenne $32\frac{1}{3}$; pour constater l'uniformité de la poudre, on mettait dans l'éprouvette 2 onces de poudre renfermée dans un sachet de flanelle. Ces mêmes précautions ont constamment été prises dans toutes les expériences, à quelques changemens près qui seront indiqués.

Pour ces 15 coups, le poids des boulets était, comme précédemment, de 2 liv. 15 onces, et leur moyen diamètre de 2,78 pouces ; la charge de la poudre était constamment de 16 onces.

NUMÉROS.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE de la pièce au pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	PÉNÉTRATION du boulet.	VALEURS DE		VITESSES MOYENNES.
						p	g	
	c.	pieds.	pouces.	onces.	pouces.	livres.	pouces.	pieds.
1	165	30	83,2	7	30,3	1671	77,4	1353
2	179	"	87,9	5	"	74	5	
3	174	"	89,4	8	"	77	5	
4	182	80	80,7	7	30,5	79	5	1490
5	168	"	78,9	4	"	82	5	
6	196	"	91,9	6	29,5	85	5	
7	186	130	83,2	8	"	87	6	1487
8	189	"	88,0	7	"	90	6	
9	202	"	94,3	9	27,0	93	6	
10	186	180	90,0	8	"	96	6	1422
11	188	"	90,7	8	"	98	6	
12	183	"	89,0	8	"	1701	7	
13	176	230	86,5	7	"	4	7	1393.
14	165	"	83,2	7	"	6	7	
15	178	"	88,5	8	"	1709	7	

150. 21 octobre 1789. Beau temps.

Baromètre, 39,55. Pièce longue.

Éprouvette, 30, 32, 35; moyenne $32 \frac{1}{3}$; la poudre dans des sachets; la charge de 16 onces; les boulets comme précédemment.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	PÉNÉTRATION du boulet.	VALEURS DE		VITESSES MOYENNES.
						p	g	
	pieds.	c.	pouces.	onces.	pouces.	livres.	pouces.	pieds.
1	330	159	84,0	9	"	1712	77,8	1330
2	"	165 d	93,0	9	"	15	8	
3	"	174	92,5	9	"	17	8	
4	"	158	84,6	9	"	20	8	1227 d
5	430	168	94,9	7	"	23	8	
6	"	154	88,6	8	"	25	9	
7	"	172	96,3	9	"	28	9	

151. 22 octobre 1789. Temps froid et serein.

Baromètre, 29,97. Thermomètre, 58. Pièce longue.

Moyenne de l'éprouvette, 30; la poudre dans des sachets; poids de la charge, 8 onces; poids de la balle comme précédemment.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	PÉNÉTRATION du boulet.	VALEURS DE		VITESSES MOYENNES.
						p	g	
	pieds.	c.	pouces.	onces.	pouces.	livres.	pouces.	pieds.
1	30	133	86,2	4	"	173	77,9	1062
2	"	135	89,5	4	16,0	34	9	
3	"	132	86,3	5	"	36	9	
4	80	124	83,7	6	"	39	78,0	1043
5	"	127	85,8	4	"	42	0	
6	"	138	89,3	5	"	44	0	
7	130	135	92,8	5	15,8	47	0	1016
8	"	140	97,0	5	"	50	1	
9	"	128	89,1	6	"	52	1	
10	180	119	84,9	5	"	55	1	1016
11	"	121	82,8	4	"	58	1	
12	"	128	88,3	5	"	61	1	

152. 23 octobre 1789. Beau temps.

Baromètre, 30. Thermomètre, 58. Pièce longue.

Moyenne de l'éprouvette, 30,8; la poudre dans les sachets; charge de poudre, 8 onces; poids des balles, 92 livres 15 onces; diamètre 2,78.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	PÉNÉTRATION du boulet.	VALEURS DE		VITESSES MOYENNES.
						p	g	
	pieds.	c.	pouces.	onces.	pouces.	livres.	pouces.	pieds.
1	230	115	83,5	5	16,5	176	78,2	960
2	"	112	88,8	4	"	66	2	
3	"	105	78,5	4	15,4	69	2	
4	330	110	86,6	4	"	71	2	924
5	"	107	85,2	4	"	74	2	
6	"	104	77,6	7	"	77	3	
7	430	110	87,8	5	"	80	3	902
8	"	102	84,3	4	"	82	3	
9	"	102	82,3	9	"	85	3	

153. 23 octobre 1789. Continuation.

Les expériences suivantes ont été faites avec une pièce de 6.

Poids du boulet..... 5 livres 13 onces,

Diamètre..... 3,48 pouces,

Distance de la pièce au pendule, 80 pieds.

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSES MOYENNES.
					p	g	
	onces.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.
1	8	157	86,6	»	1788	78,4	703
2	»	169	88,4	7	93	4	
3	»	158	87,6	»	99	4	
4	16	201	85,9	»	1804	5	990
5	»	260	94,8	9	09	5	
6	»	262	92,8	9	15	6	
7	24	295	90,3	9	20	6	1222
8	»	290	94,0	9	26	7	

154. 26 et 28 octobre 1789.

Le pendule faisait 401 oscillations en 10 minutes, ce qui donne $n = 40,1$, ou 40 à peu près. Le pendule était tout-à-fait hors de service; on l'ôta: il pesait alors 1831 livres. Or

Le poids des boulets enfoncés dans le pendule est. . . 191 livres 11 onces,

Idem des chevilles. 21 14

Idem du pendule au commencement. 1655 »

Total 1868 9

Poids actuel . . 1831

Donc la perte par évaporation et les éclats 37 9.

Poids actuel. 1831

Poids primitif. 1655

Différence. 176.

Divisant 176 par le nombre total des coups, qui se monte à 65, en portant au double le nombre de coups tirés avec la pièce de 6, on a le quo-

5..

tient 2,7; c'est l'accroissement moyen qu'il faut ajouter à chaque valeur de p. Cet accroissement doit être doublé pour la pièce de 6.

Il reste à trouver les changemens de valeur de g. Or la somme des distances des points frappés à l'axe s'élève à 5985,3. Divisant cette somme par 65, le quotient 92,1 donne la distance moyenne; la distance première a été de 77,3 pouces, la différence entre cette distance et la distance moyenne est 14,8 pouces; on a donc la proportion $1831 : 176 :: 14,8 : 1,4$; le centre de gravité est donc déplacé de 1,4 pouces; ajoutant cette quantité à 77,3, on obtient 78,7 pour la distance actuelle du centre de gravité à l'axe. Divisant 1,4 par 65, on obtient 0,02154 pour la quantité dont il faut augmenter chaque valeur de g. Cette augmentation devant être prise deux fois pour la pièce de 6.

On a tenu compte des changemens dans les valeurs de p, g, etc., dans la table suivante, où les vitesses moyennes sont calculées eu égard à ces nouvelles valeurs.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce à l'axe.	CHARGES de poudre.	BOULET.		VITESSE du boulet.	VITESSES RÉDUITES pour des boulets de 3 livres, de 2,78 pouces de diamètre, et pour 30 pouces de pression atmosphérique.
			DIAMÈTRE.	POIDS.		
	pieds.	onces.	pouces.	livres.	pieds.	pieds.
1	30	16	2,78	2,938	1371	1357
2	30	"	"	2,938	1353	1339
3	30	"	"	2,938	1584	1568
4	80	"	"	2,933	1490	1473
5	130	"	2,79	2,958	1437	1471
6	180	"	2,78	2,953	1422	1410
7	230	"	"	2,964	1393	1384
8	330	"	"	2,922	1330	1310
9	430	"	"	2,984	1227	1219
10	30	8	"	3,000	1062	1061
11	80	"	"	3,000	1049	1048
12	130	"	"	3,000	1016	1015
13	180	"	"	3,000	1016	1015
14	230	"	"	3,000	960	960
15	330	"	"	2,985	924	922
16	430	"	"	2,953	902	895
17	80	8	3,50	5,823	703	"
18	80	16	3,50	5,854	990	"
19	80	24	3,475	5,750	1222	"

} Pièce courte.

} Pièce longue.

} Pièce de 6.

Les vitesses sont réduites à ce qu'elles auraient dû être si le baromètre s'était tenu constamment à 30 pouces de hauteur, et si les boulets avaient eu tous le même poids de 3 livres exactement. On a fait la réduction en dimi-

nuant les vitesses en raison inverse des racines carrées des poids et des diamètres des boulets.

Expériences faites avec des pièces et des mortiers tirés sur la rivière, sous différens angles d'élévation, dans la vue de connaître les portées.

155. 26 octobre.

Les deux mortiers en fer qui ont servi à ces expériences étaient du calibre de 8 pouces et de 10 pouces; on a tiré successivement des bombes et des boulets pleins. Les chutes dans l'eau ont été observées au moyen de deux théodolites, par les lieutenans Mudge et Dixon, qui étaient postés l'un sur la rive droite, l'autre sur la rive gauche.

NUMÉROS.	MORTIERS.	ANGLE D'ÉLEVATION.	BOULETS OU BOMBES.		DURÉE	PORTÉES.		
			CHARGE.					du
				Diamètre.	Poids.			TRAJET.
	pouces.		livr. onc.	pouces.	livres.	secondes.	yards.	
1	8	60°	2 4 $\frac{7}{8}$	7,69	64 $\frac{1}{4}$	25	1500	} Boulets pleins.
2	8	»	» »	7,68	63 $\frac{3}{4}$	24	1400	
3	8	»	» »	7,69	48	26 $\frac{1}{2}$	1675	} Bombes.
4	8	»	» »	7,68	48	27	1625	
5	10	»	4 8	9,74	129	25 $\frac{1}{2}$	1850	} Boulets pleins.
6	10	»	» »	9,74	127 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$	1635	
7	10	»	» »	9,74	96	27	1770	} Bombes.
8	10	»	» »	9,74	96	»	2075	

Diamètre du 1^{er} mortier. 7,875.

Diamètre du 2^e id.. 9,875.

156. 27 octobre 1789. Hauteur du baromètre, 30.

Pièce de 3 longue.

NUMÉROS.	ANGLE D'ÉLEVATION.	CHARGE.	BOULETS.		DURÉE du TRAJET.	PORTÉE.	ANGLE de CHUTE.
			POIDS.	DIAMÈTRE.			
		onces.	livr. onc.	pouces.	secondes.	yards.	
1	45°	8	2 15	2,78	"	2420	Ces portées sont très incertaines.
2	"	8	" "	"	"	2400	
3	"	8	" "	"	"	3270	
4	"	4	" "	"	"	3160	
5	"	4	" "	2,70	23	"	
6	"	2	" "	"	16	1290	
7	"	4	" "	2,78	22 $\frac{1}{2}$	1950	
8	30	8	" "	"	22	2560	
9	20	8	" "	"	12	1600	

157. 28 octobre 1789. Continuation.

Pièce de 3 longue.

NUMÉROS.	ANGLE D'ÉLEVATION.	CHARGE.	BOULETS.		DURÉE du TRAJET.	PORTÉE.	ANGLE de CHUTE.
			POIDS.	DIAMÈTRE.			
		onces.	livr. onc.	pouces.	secondes.	yards.	
1	45°	8	3 0	2,78	"	2450	"
2	"	"	" "	"	"	2420	"
3	"	"	" "	"	"	2330	"
4	"	"	" "	"	"	2220	"
5	"	16	" "	"	"	2640	61
6	"	"	" "	"	"	2720	"
7	"	"	2 15 $\frac{3}{4}$	"	"	2640	"
8	"	"	" "	"	"	2840	61 $\frac{1}{2}$
9	"	24	2 15 $\frac{1}{2}$	"	"	2640	"

158.

28 OCTOBRE. Mortier de 8 pouces. Charge de 24 onces.				10 NOVEMBRE. Mortier de 10 pouces. Charge de 32 onces. Élévation, 45°.		10 NOVEMBRE. Pièce de 3, en élévation de 75°.		
Numér.	Élévation.	Chute.	Portée.	Numéros.	Portée.	Numéros.	Charge.	Portée.
			yards.		yards.		onces.	yards.
1	35°	53°	1900	1	1920	1	8	1920
2	35	51	2200	2	2020	2	8	2050
3	35	61 $\frac{1}{2}$	1700	3	2120	3	16	1890
				4	1960	4	"	2070
				5	2120	5	"	1270
				6	1930	6	24	1870
				7	2070	7	"	2300
				8	2080	8	"	1740

Reprise des expériences avec le pendule.

159. 14 novembre 1789.

On a pris un nouveau pendule, on l'a pesé, mesuré, on l'a fait osciller, et on a trouvé ce qui suit :

Dimensions du pendule.

Longueur.	Largeur.	Épaisseur.	Poids.
50 $\frac{3}{4}$ pouces.	18 $\frac{1}{4}$ pouces.	23 $\frac{1}{2}$ pouces.	1748 livres.

Son centre de gravité est à 79 $\frac{1}{4}$ pouces de l'extrémité supérieure, et à 79,3 de l'extrémité inférieure.

Suspendu, le pendule faisait 397 oscillations en 10 minutes, ce qui donne $n = 39,7$.

160. 16 novembre.

Baromètre, 29,4. Thermomètre, 51.

Les expériences suivantes ont eu pour objet de connaître la résistance de l'air, en plaçant les pièces à différentes distances du pendule; on a tiré les 10 premiers coups avec une pièce de 3 longue, et les 7 derniers avec une

pièce de 4; on a chargé la première pièce avec la poudre dont nous faisons ordinairement usage; une charge de 2 onces donne, dans mon éprouvette, $36\frac{1}{2}$ pour moyenne: on s'est servi pour la deuxième pièce d'une poudre plus forte; 2 onces mises dans mon éprouvette donnent $38\frac{1}{6}$, ainsi qu'il suit:

Éprouvette.

Ancienne poudre.		Nouvelle poudre.	
36	} moyenne, $36\frac{1}{2}$.	38	} $38\frac{1}{6}$ moyen.
$36\frac{1}{2}$		$38\frac{1}{3}$	
$36\frac{9}{10}$		$38\frac{1}{8}$	

On a mis la poudre dans l'éprouvette sans sachets et sans la fouler, avec la seule précaution de bien l'arranger au fond de l'âme, et l'on a remarqué non-seulement plus d'uniformité, mais aussi plus d'énergie dans l'action de la poudre, dans le rapport de 36 à 30 ou à 31. Depuis l'on a toujours suivi la même méthode pour chaque éprouvette.

Diamètre des boulets de 3 livres 2,78 pouces.

Diamètre des boulets de 4 3,09.

Charges.

Pièce de 3 24 onces.

Pièce de 4 $21\frac{3}{8}$.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	POIDS des BOULETS.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE des BOULETS.	VITESSES RÉDUITES.
						p	g		
	pieds.	livr. onc.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	30	3 0	215	89,3	6	1748	79,3	1727	1722
2	"	" "	217	90,7	6	51	3		
3	"	" "	220	91,0	10	54	3		
4	80	" "	214	89,8	9	56	3	1700	1695
5	"	" "	211	90,7	9	59	4		
6	"	" "	195	91,6	9	62	4		
7	"	" "	214	90,2	10	65	4	1609	1604
8	130	" "	192	84,2	6	67	4		
9	"	" "	203	91,0	9	70	4		
10	"	" "	190	88,7	8	73	4		
11	90	4 1 $\frac{1}{2}$	187 d	79,5	9	76	4	effleuré.	
12	"	" "	113 d	79,5	0	79	5		
13	"	" "	184 d	90,0	11	81	5		
14	"	" "	212	89,0	10	84	5	1268	1230
15	"	" "	231	90,8	9	87	5		
16	"	" "	213	94,6	9	90	5		
17	"	" "	203	90,8	10	92	5		

161. 17 novembre 1789.

Continuation des expériences avec la pièce de 3.

Baromètre, 29,96. Thermomètre, 51.

La charge de poudre était de 24 onces.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	POIDS des BOULETS.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE des BOULETS.	VITESSES RÉDUITES.
						p	g		
	pieds.	livr. onc.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	180	3 0	203	91,5	5	1795	5	1586	1578
2	"	" "	189	91,5	6	98	6		
3	"	" "	188	87,3	10	1801	6		
4	230	" "	171	79,7	9	3	6	1550	1546
5	"	" "	187	89,6	10	6	6		
6	"	2 15 $\frac{1}{2}$	183 d	93,3	10	9	6		
7	"	" "	185	91,5	10	12	6	effleuré.	
8	330	" "	132 d	90,3	5	15	6		
9	"	" "	168 d	91,2	9	17	7		
10	"	" "	118 d	88,1	10	20	7	1520	1498
11	"	" "	184	90,4	5	23	7		
12	"	2 15	169	84,5	8	26	7		
13	"	" "	165	85,8	9	28	7	1323	1300
14	430	" "	169	95,4	10	31	7		
15	"	" "	164	96,4	10	34	7		
16	"	" "	141	82,8	10	37	7	effleuré.	

ÉPROUVETTE..... $\left\{ \begin{array}{l} 35 \frac{3}{4} \\ 36 \frac{1}{2} \\ 36 \frac{3}{4} \end{array} \right\}$ moyenne, $36 \frac{1}{3}$.

Les vitesses réduites de la dernière colonne sont rapportées à un boulet pesant exactement 3 livres, à une poudre donnant 30 à l'éprouvette, et à 30 pouces de hauteur barométrique.

162. 18 novembre 1789. Continuation.

Baromètre, 29,33. Thermomètre, 48.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	CHARGES.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE des BOULETS.	VITESSES RÉDUITES.
						p	g		
	pieds.	onces.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.	pieds.
1	30	4	82	92,7	6	1839	79,8		
2	"	"	77	92,6	4	42	8	669	670
3	"	"	78	90,8	4	45	8		
4	80	"	79	92,0	8	48	8		
5	"	"	71	85,8	5	51	8	670	669
6	"	"	74	85,0	4	53	8		
7	130	"	77	92,7	5	56	8		
8	"	"	83 d	87,0	3	59	9	651	50
9	"	"	83 d	85,8	5	62	9		
10	"	"	75	90,1	6	64	9		
11	"	"	67	82,6	5	67	9		
12	180	"	70	85,8	4	70	9	641	641
13	"	"	71	88,5	7	73	9		
14	"	"	67	83,8	5	75	9		
15	230	"	75	92,4	4	78	80,0		
16	"	"	75	92,2	4	81	0	653	652
17	"	"	76 $\frac{1}{2}$	93,9	3	84	0		
18	30	12	150	94,4	6	87	0		
19	"	"	147	91,8	7	89	0	1296	1291
20	"	"	147	89,7	8	92	0		
21	80	"	133	88,1	9	95	0		
22	"	"	139	89,9	9	98	1	1247	1243
23	"	"	136	87,6	8	1900	1		
24	130	"	131	89,1	10	3	1		
25	"	"	137	95,9	10	6	1	1226	1222
26	"	"	130	85,9	8	1856	79,8		
27	180	"	132	86,7	9	59	9		
28	"	"	136	88,2	9	62	9	1214	1211
29	"	"	138	90,9	8	65	9		
30	230	"	132	88,3	9	68	9		
31	"	"	131	86,6	10	71	9	1205	1200
32	"	"	132	86,7	9	73	9		

Diamètre des boulets. 2,78 pouces.
 Poids des deux premiers boulets 2 livres 15 onces.
Idem des 13 boulets suivans. 2 14 $\frac{3}{4}$.
Idem des boulets restans. 2 14 $\frac{1}{2}$.

Trois charges de poudre de 2 onces chacune ont donné à l'éprouvette,

35
 35 $\frac{1}{6}$
 35 $\frac{1}{8}$ } moyenne, 35,1.

Une charge de 4 onces a donné à l'éprouvette 84 $\frac{3}{4}$; au vingt-cinquième coup, une large bande de fer s'est rompue et s'est détachée de la partie inférieure du pendule. On a déduit le poids de cette bande dans les valeurs suivantes de p et de g. Les vitesses de la dernière colonne sont calculées pour un boulet de 3 livres, une poudre de 36 à l'éprouvette, et 30 pouces de hauteur barométrique.

163. 19 novembre 1789. Continuation.

Baromètre, 29,50. Thermomètre, 46.

NUMÉROS.	DISTANCE de la pièce au pendule.	CHARGES de poudre.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE		VITESSE des BOULETS.	VITESSES RÉDUITES.
						p	g		
1	330	12	131	94,7	9	1876	80,0	1119	1105
2	"	"	125	91,4	9	79	0		
3	"	"	120	86,0	10	82	0		
4	430	"	84 d	87,9	3	84	0	effleuré.	

La plupart des boulets tirés à la dernière distance ayant rasé le pendule ou frappé contre les madriers, on a discontinué le tir.

Poids des boulets. 2 livres 14 onces.

POUDRE { 35
 35 $\frac{1}{2}$
 35 $\frac{3}{4}$ } moyenne, 35 $\frac{3}{4}$ à l'éprouvette.

On a tiré ensuite la même pièce de 3 à 30 pieds de distance du pendule,

avec une charge de 4 onces de poudre et en plaçant les boulets à différentes distances de la bouche, la poudre restait toujours au fond de l'âme; on avait en vue de connaître les pertes de vitesse occasionnées par l'éloignement des boulets de la charge.

Poids du boulet 2 livres 15 onces.

Diamètre d'*idem*. 2,78 pouces.

NUMÉROS.	DISTANCE du boulet à la bouche.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	OSCILLATIONS du pendule.	POIDS des CHEVILLES.
	pouces.	pouces.	c.	onces.
1	64 $\frac{1}{2}$	90	76	10
2	59 $\frac{3}{4}$	90	69	7
3	53 $\frac{3}{4}$	90	67	6
4	47 $\frac{1}{4}$	90	62	5
5	41 $\frac{3}{4}$	88,6	59	3
6	35 $\frac{1}{4}$	90	55	3
7	29 $\frac{3}{4}$	88,5	46	»
8	23 $\frac{1}{4}$	90	43	»
9	17 $\frac{3}{4}$	90	40	»
10	11 $\frac{3}{4}$	90	34	»
11	5 $\frac{3}{4}$	81	18	»
12	0	76	13	»

Ce tableau met en évidence une propriété remarquable. Les vitesses sont à peu près comme les nombres de la quatrième colonne divisés par les nombres correspondans de la troisième colonne; et comme ceux-ci sont presque égaux, les vitesses sont entre elles comme les nombres de la quatrième colonne environ. Les boulets des n^{os} 10 et 12 ont rejailli en arrière du pendule. Après avoir rétabli la barre de fer qui avait été rompue, le pendule faisait $397 \frac{1}{2}$ oscillations en 10 minutes, ce qui donne $n = 39 \frac{3}{4}$ comme au commencement à peu près.

164. 20 novembre.

On a pesé et fait osciller le pendule pour trouver la position de son centre de gravité.

Poids du pendule 1976 livres.

Distance du centre de gravité à l'axe 80,3.

Cette distance était de 79,3 dans le commencement.

On a réparti également sur tous les nombres, le pouce de différence qu'on a réduit à $\frac{3}{10}$, après la rupture de la barre de fer.

Au résumé on voit que

Le poids de tous les boulets logés dans le pendule	246 livres,
<i>Idem</i> des chevilles	34 $\frac{1}{2}$
Somme	280 $\frac{1}{2}$
Poids au commencement.	1748.
Somme	2028 $\frac{1}{2}$
Poids à la fin	1976
Perte par l'évaporation et les éclats	52 $\frac{1}{2}$.
La somme des distances des points frappés à l'axe	6154 pouc.,
Divisée par le nombre 69 de ces points, donne	89,2
Distance du centre de gravité au commencement	79,3
Différence.	9,9.

Or, la différence du poids du pendule au commencement et à la fin est 228 livres. On a la proportion $1976 : 228 :: 9,9 : 1,1$. Ce changement de distance du centre de gravité s'accorde avec celui qu'on a trouvé en mesurant.

165. *Sommaire des deux séries d'expériences faites cette année avec la pièce de 3 longue.*

Vitesses trouvées par expérience en faisant varier les charges de poudre et les distances du pendule.

Baromètre 30.

Poudre 36, à l'éprouvette.

DISTANCES de la pièce au pendule.	CHARGES.				
	24 ONCES.	16 ONCES.	12 ONCES.	8 ONCES.	4 ONCES.
30	1722	1568	1291	1061	670
80	1695	1473	1243	1048	669
130	1604	1471	1222	1015	650
180	1578	1410	1211	1015	641
230	1546	1384	1200	960	652
330	1498	1310	1105	922	"
430	1300	1219	"	895	"

Poids du boulet. 3 livres.

Diamètre. 2,78 pouces.

Plusieurs de ces résultats sont évidemment irréguliers. Je soupçonne que ce sont principalement les cartouches et les sachets qui donnent lieu à cette irrégularité. Aussi je pense que dans les expériences subséquentes, on devra mettre la poudre sans enveloppe dans la pièce. Je me suis servi aussi avec avantage de cette méthode dans une nouvelle éprouvette dont l'action est beaucoup plus régulière, en plaçant la poudre de la manière indiquée.

166. En omettant les trois nombres de la dernière ligne posés vis-à-vis 430, comme les plus douteux, et en faisant quelques légers changemens dans les autres nombres et une interpolation entre les distances 230 et 330, on obtient une série de nombres assez réguliers, c'est ce que font voir leurs différences successives écrites en petit caractère dans le tableau suivant :

Tableau des vitesses régulières.

DISTANCES.	24 ONCES.	16 ONCES.	12 ONCES.	8 ONCES.	4 ONCES.
30	1730	1555	1290	1060	680
80	1688 ⁴²	1514 ⁴¹	1259 ³¹	1036 ²⁴	669 ¹¹
130	1636 ⁵²	1474 ⁴⁰	1229 ³⁰	1012 ²⁴	659 ¹⁰
180	1592 ⁴⁴	1436 ³⁸	1200 ²⁹	989 ²³	649 ¹⁰
230	1550 ⁴²	1399 ³⁷	1172 ²⁸	966 ²³	640 ⁹
280	1510 ⁴⁰	1364 ³⁵	1145 ²⁷	944 ²²	
330	1471 ³⁹	1330 ³⁴	1119 ²⁶	922 ²²	

167. Pour former le tableau suivant, prenez les moyennes vitesses entre deux vitesses consécutives du tableau précédent, correspondantes à une même charge, et écrivez-les dans la première colonne; placez dans la deuxième colonne les vitesses correspondantes perdues par un trajet de 50 pieds dans l'air. Dans la troisième colonne se trouvent les résistances calculées au moyen de la formule $r = \frac{vv'}{32s} b$ dans laquelle

r = résistance.

v = vitesse moyenne de la première colonne.

v' = vitesse perdue de la deuxième colonne.

s = 50 pieds.

$b = 3^{\text{liv}} = 48^{\text{onc}} = \text{poids du boulet.}$

En remplaçant b et s par leurs valeurs, on obtient

$$r = \frac{48vv'}{1600} = \frac{3}{100} vv'.$$

Les quatrième et cinquième colonnes de différences montrent que les résistances ne s'éloignent pas beaucoup de la régularité.

Maintenant, pour avoir les résistances correspondantes à des vitesses croissant régulièrement de 50 en 50 pieds, nous allons construire la courbe des résistances. Les nombres de la première colonne forment les ordonnées, et les nombres de la troisième colonne sont les abscisses de la courbe (1).

MOYENNES VITESSES.	VITESSES PERDUES.	RÉSISTANCES.	1 ^{re} DIFFÉRENCE.	2 ^e DIFFÉRENCE.
	pieds.	onces.		
4 onces.	645 654 664 675	174 186 199 213	12 13 14	1 1
8 onces.	933 955 978 1001 1024 1048	604 632 661 691 722 754	28 29 30 31 32	1 1 1 1
12 onces.	1132 1159 1186 1215 1244 1275	883 939 997 1057 1120 1186	56 58 60 63 66	2 2 3 3
16 onces.	1347 1382 1418 1455 1494 1535	1374 1455 1544 1641 1748 1865	81 89 97 107 117	8 8 10 10
24 onces.	1491 1530 1571 1614 1659 1706	1744 1864 1994 2136 2290 2457	120 130 142 154 167	10 12 12 13

(1) On n'a pas jugé nécessaire de copier la courbe tracée par l'auteur.

Nous voyons par cette courbe que les résistances correspondantes à des vitesses au-dessous de 900 pieds par seconde, sont trop petites, mais que les autres vitesses marchent régulièrement, et c'est en mesurant dans la courbe les abscisses correspondantes à des vitesses croissant régulièrement qu'on a formé la table suivante :

Table des résistances.

Poids du boulet. 3 livres.
Diamètre 2,78.

Baromètre, 30.

VITESSES.	RÉSISTANCES.	1 ^{re} DIFFÉRENCE.	2 ^e DIFFÉRENCE.	RÉSISTANCES.	1 ^{re} DIFFÉRENCE.	2 ^e DIFFÉRENCE.
pieds.	onces.			livres.		
900	566	78		35,4	4,8	
950	644	85	7	40,2	5,3	5
1000	729	92	7	45,5	5,8	5
1050	821	98	6	51,3	6,2	4
1100	919	104	6	57,5	6,6	4
1150	1023	110	6	64,1	6,9	3
1200	1133	116	6	71,0	7,2	3
1250	1249	121	5	78,2	7,5	3
1300	1370	126	5	85,7	7,8	3
1350	1496	131	5	93,5	8,1	3
1400	1627	135	4	101,6	8,4	3
1450	1762	138	3	110,0	8,6	2
1500	1900	141	3	118,6	8,8	2
1550	2041	143	2	127,4	9,0	2
1600	2184	144	1	136,4	9,1	1
1650	2328	144	0	145,5	9,1	0
1700	2472			154,6		

Observations générales sur les Expériences faites en 1789.

168. Une première série d'expériences avait pour objet d'établir une comparaison entre deux pièces de différente longueur, l'une courte et l'autre longue.

Pour toutes les deux on avait

La distance de la bouche au pendule.....	30 pieds.	}
Charges de poudre.....	16 onces.	
Poids du boulet.....	2 livr. 15	

Après avoir tiré avec chaque pièce un nombre suffisant de coups, on a calculé les vitesses moyennes que l'on a trouvé être

Pour la pièce longue, par seconde 1584 pieds ;
 Pour la pièce courte, par seconde 1371 pieds.

Ainsi, la vitesse communiquée par la pièce longue, surpasse la vitesse communiquée à la pièce courte d'une quantité qui est entre la sixième et la septième partie de cette dernière vitesse.

On a ensuite tiré la pièce courte avec les mêmes charges de poudre et de boulets, et en mettant un obstacle devant la culasse pour empêcher le recul. La vitesse moyenne était alors de 1353 pieds par seconde, un peu moindre que lorsque la mobilité de l'affût permettait le recul ; mais la différence n'est pas tellement grande qu'on ne puisse la regarder comme la différence ordinaire qui a lieu entre les expériences d'un jour à l'autre, en sorte qu'on peut dire avec assurance que l'absence du recul n'apporte pas de différence sensible dans la vitesse des boulets.

La comparaison entre les effets de la pièce longue et courte étant faite, on continua les expériences avec la pièce longue seulement ; elle suffisait pour les autres objets de recherche. Pendant plusieurs jours, on a fait les expériences décrites ci-dessus en tirant la pièce à différentes distances du pendule. Les vitesses moyennes ont été calculées au moyen de trois résultats semblables et bien exacts ; on a consigné dans une table ces vitesses moyennes calculées pour le même état de l'atmosphère, même état de la poudre et pour le poids constant du boulet.

Charge	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000								
Vitesse	1371	1380	1390	1400	1410	1420	1430	1440	1450	1460	1470	1480	1490	1500	1510	1520	1530	1540	1550	1560	1570	1580	1590	1600	1610	1620	1630	1640	1650	1660	1670	1680	1690	1700	1710	1720	1730	1740	1750	1760	1770	1780	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900

Baromètre, 30.

Éprouvette, 36.

Poids des boulets, 3 livres.

TABLE DES VITESSES RAPPORTÉES AUX DISTANCES.				TABLE DES VITESSES RAPPORTÉES AUX CHARGES DE POUDRE.			
NUMÉROS.	DISTANCES an pendule.	CHARGES de poudre.	VITESSES. pieds.	NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	DISTANCES au pendule.	VITESSES. pieds.
1	30	4	669	1	4	30	669
2	"	8	1061	2	"	80	669
3	"	12	1290	3	"	130	650
4	"	16	1568	4	"	180	641
5	"	24	1717	5	"	230	652
6	80	4	669	6	8	30	1061
7	"	8	1048	7	"	80	1048
8	"	12	1242	8	"	130	1015
9	"	16	1473	9	"	180	1015
10	"	24	1692	10	"	230	960
11	130	4	650	11	"	330	922
12	"	8	1015	12	"	430	895
13	"	12	1220	13	12	30	1290
14	"	16	1471	14	"	80	1242
15	"	24	1601	15	"	130	1220
16	180	4	641	16	"	180	1204
17	"	8	1015	17	"	230	1197
18	"	12	1204	18	"	330	1104
19	"	16	1410	19	16	30	1568
20	"	24	1572	20	"	80	1473
21	230	4	652	21	"	130	1471
22	"	8	960	22	"	180	1410
23	"	12	1197	23	"	230	1384
24	"	16	1384	24	"	330	1310
25	"	24	1540	25	"	430	1219
26	330	8	922	26	24	30	1717
27	"	12	1104	27	"	80	1692
28	"	16	1310	28	"	130	1501
29	"	24	1491	29	"	180	1572
30	430	8	895	30	"	230	1540
31	"	16	1219	31	"	330	1491
32	"	24	1274	32	"	430	1274

169. On voit par cette table que les vitesses décroissent à mesure que les distances augmentent, et quoiqu'il n'y ait pas assez de continuité dans les

distances pour établir une loi de décroissement assez exacte pour baser un système complet d'artillerie pratique, on peut néanmoins tirer, des résultats précédens, des conséquences qui peuvent être utiles.

1°. En comparant les vitesses dues à la pièce longue et consignées dans la précédente table, avec les vitesses rapportées plus haut de la pièce courte, toutes deux étant chargées avec 1 livre (16 onces) de poudre et placées à diverses distances du pendule, on remarquera que l'excès de vitesse due à la pièce longue sur celle de la pièce courte s'élève d'abord à $\frac{1}{7}$ de cette vitesse ; et lorsque le boulet a seulement traversé 230 pieds dans l'air, les deux vitesses sont réduites à l'égalité. Les longueurs de ces deux pièces sont à peu près comme 2 à 1, rapport plus grand que celui qu'on peut trouver dans la pratique entre deux pièces de même calibre. Ceci fait voir combien est faible l'avantage sur les portées qu'on croirait obtenir par l'augmentation de longueur restant d'ailleurs dans les limites, admises par la pratique, et combien est sujette à erreur la méthode de déterminer les vitesses relatives correspondantes à certaines longueurs de ces pièces, au moyen des portées qu'elles ont fournies, puisque les irrégularités du trajet s'ajoutant à l'effet que nous venons de rapporter, les portées fournissent un *criterium* très incertain, toutes les fois qu'il s'agit de vitesses considérables.

2°. Cette table fournit encore une nouvelle preuve du faible avantage de portée qu'on obtient par l'augmentation de la charge au-delà de ce qui est nécessaire pour communiquer une certaine vitesse, puisque la résistance de l'air exerce une action si puissante qu'elle détruit promptement le gain de vitesse dû à l'excès de la charge. On voit par exemple dans la table, qu'avec une charge de 16 onces de poudre, le boulet, après un trajet de 230 pieds dans l'air, a la même vitesse qu'avec une charge de 12 onces après avoir parcouru 30 pieds dans l'air. On remarque encore que la vitesse avec une charge de 24 onces, après un trajet de 180 pieds, est presque égale à celle d'une à 16 après un trajet de 30 pieds. La différence est seulement de 4 pieds par seconde, tandis qu'elle s'élevait à 149 pieds par seconde, au premier instant du tir.

3°. Il est aussi évident par la table précédente, que les vitesses communiquées par différentes quantités de poudre, sont à peu près proportionnelles aux racines carrées des charges.

En tenant compte des vitesses perdues dans l'air, on a calculé les résistances correspondantes de ce fluide qu'on trouve consignées dans la table donnée page (48). Cette table montre qu'il y a un accroissement régulier et successif

de résistance correspondant à l'augmentation de vitesse, et qu'il n'existe pas de ces sauts brusques et discontinus dans la loi de résistance, comme Robins l'a soupçonné. La loi de résistance suit au contraire graduellement les modifications que subit la vitesse, probablement à raison du progrès du vide qui se forme derrière le projectile dans son trajet, depuis les plus faibles vitesses où les résistances sont proportionnelles aux carrés de ces vitesses, jusqu'aux grandes vitesses de 1200 à 1400 pieds par seconde, où le vide étant complet, la résistance atteint son maximum étant alors proportionnelle à la puissance $2\frac{1}{2}$ de la vitesse; passé ce terme, quelle que soit l'augmentation de la vitesse, la résistance diminue successivement et devient proportionnelle à la puissance de $2\frac{1}{3}$ de la vitesse, et peut-être encore à une puissance moindre. La découverte de cette loi est une des connaissances que l'on doit aux expériences précédentes.

Quelques essais faits avec une pièce de 6 ont fait voir qu'on pouvait faire les expériences du pendule avec des pièces d'un plus grand calibre. Voici quelles étaient les dimensions et proportions de la pièce et du boulet.

Longueur de l'âme de la pièce. 57 $\frac{1}{2}$ pouces.

Diamètre de *idem*. 3,67 pouces.

Poids du boulet. 5 livres 13 onces.

Diamètre mesuré. 3 $\frac{1}{2}$ pouces.

Distance de la pièce au pendule. 80 pieds.

On a chargé la pièce successivement avec 8, 16 et 24 onces de poudre, le pendule était frappé par le boulet avec les vitesses moyennes :

Charges = 8 = 16 = 24.

Vitesses moyennes = 703 = 990 = 1222.

Ces résultats font encore voir que les vitesses sont à peu près proportionnelles aux racines carrées des charges.

On a fait en outre un grand nombre d'expériences avec la pièce de 3, pour connaître l'étendue des portées; mais les résultats étaient tellement variés et irréguliers, qu'on n'a pu tirer aucune conséquence valable. Quoi qu'il en soit, on a consigné les résultats moyens dans la table suivante.

NUMÉROS.	ÉLEVATION.	CHARGES de poudre.	TEMPS du TRAJET.	PORTÉE.	ANGLE de CHUTE.
	degrés.	onces.	secondes.	yards.	degrés.
1	20	8	12	1600	»
2	30	8	22	2560	»
3	45	2	16	1290	»
4	45	4	22 $\frac{1}{2}$	1950	»
5	45	8	»	2400	»
6	45	16	»	2700	61
7	45	24	»	2800	»
8	75	8	»	1900	»
9	75	16	»	2000	»
10	75	24	»	2200	»

EXPÉRIENCES DU PENDULE FAITES EN 1791.

170. 27 juin 1791.

Pour mettre en expérience la pièce de 6 comme on avait déjà fait avec les pièces de 3 et de 1, on a préparé un nouveau pendule de plus grande dimension que le premier. Ce jour a été employé à l'opération du pesage et à régler le pendule. Il pesait 1632 livres; l'ayant pesé de nouveau quelques jours après, son poids était réduit à 1629 $\frac{1}{2}$ livres.

171. 28 juin 1791.

On a mesuré et fait osciller le pendule pour trouver son centre de gravité. Voici les résultats de ces opérations.

Diamètre de l'axe 2,4 pouces,

Distance à ce diamètre { Centre de gravité d'un côté du bloc . . . 76
Idem, de l'autre côté 75,7
Moyenne distance 78,85

172. 29 juin 1791.

On a divisé les faces du pendule en pouces pour mieux remarquer les endroits frappés par le boulet. Ensuite on a fait osciller le pendule pour trouver la position du centre d'oscillation, le pendule a fait

401 oscillations en 10 minutes ;

d'où l'on conclut ainsi $n = 40,1$.

173. 13 juillet 1791.

On a suspendu, fait osciller et mesuré la pièce, c'était une pièce de 6 de métal de canon, et le fond de l'âme était arrondi en hémisphère.

Longueur de l'âme jusqu'au fond de l'hémisphère. 80,5 pouces.

Diamètre de l'âme 3,65.

Distance du centre de gravité au-dessous de l'axe de rotation. . 85,8.

Distance de l'axe de l'âme au-dessous *idem*. 92,2.

Poids de la pièce seule 1370 livres.

Idem de la pièce avec ses ferrures 1618 livres.

Oscillations par minute 38.

174. 14 juillet 1791.

Baromètre, 30,0. Thermomètre, 66.

On a commencé à tirer avec la pièce suspendue comme il a été dit.

Distance de la pièce au pendule. 30 pieds.

Diamètre du boulet 3,55 pouces.

Poids d'*idem*. 6 livres 1 $\frac{1}{2}$ once.

Longueur des premières charges de poudre 9,8 pouces.

Idem des dernières charges de poudre. 8,3 pouces.

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	OSCILLATIONS		DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE			VITESSE des BOULETS.
		de la pièce.	du pendule.			p	g	n	
	onces.			pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	32	649	458	84,7	18	1627	76,10	40,20	1686
2	"	630	452	87,4	11	1634	15	22	1620
3	"	635	465	88,2	10	1641	20	24	1658
4 d	24	569	462	91,9	9	1648	25	26	1588
5	"	549	410	86,2	8	1654	30	28	1508
6	"	549	409	85,9	9	1661	35	30	1517

La poudre essayée à mon éprouvette a donné les résultats suivans :

CHARGE.	CHARGES	OSCILLATIONS	DISTANCE	POIDS	VITESSE
onces.	de la	du	du	des	des
	pièce.	pendule.	point	CHEVILLES.	BOULETS.
			frappé		
			à l'axe.		
28,3	649	458	84,7	18	1686
28,3	630	452	87,4	11	1620
28,3	635	465	88,2	10	1658
28,3	569	462	91,9	9	1588
28,3	549	410	86,2	8	1508
28,3	549	409	85,9	9	1517

La poudre de l'année dernière donnait seulement un recul de 35 à 36, sur les cordes de l'éprouvette, ce qui répond à un sinus-verse de 6. Ainsi, la poudre de cette année est plus forte que celle de l'année précédente. Cependant les gens chargés d'en avoir soin assuraient que c'était la même; mais je soupçonne que la poudre a été déplacée ou changée, qu'il y avait une erreur qu'ils ignoraient ou dont ils ne voulaient pas convenir.

On a pris de nouvelles cartouches faites maintenant avec du papier de soie; ces cartouches étaient parfaitement arrondies vers le bout pour entrer exactement dans le fond de l'âme qui était une demi-sphère parfaite; les boulets enfermés dans le même papier étaient entourés d'un fil qui les liait en haut et en bas pour les maintenir en place. Le boulet était enfoncé par sa partie postérieure jusqu'à moitié dans la poudre; on coupait le bout du papier qui dépassait la partie antérieure où se trouve le nœud du fil qui entoure le boulet. Toutes ces dispositions donnaient au tir plus de régularité qu'il n'en avait auparavant.

Ce jour, les boulets ont pénétré si profondément dans le pendule, qu'on n'a pu trouver d'instrument assez long pour les retirer. Après le premier coup, un fil d'archal de 26 pouces étant introduit dans le bloc, n'a pas rencontré le boulet. Ainsi, le boulet s'est enfoncé par cette première pénétration de plus de 29 $\frac{1}{2}$ pouces.

A la fin des expériences de ce jour on a enfoncé deux nouvelles chevilles

de bois dans le pendule pour boucher les trous; il faudra ajouter le poids de ces chevilles au poids du pendule.

175. 16 juillet 1791.

Baromètre, 30. Thermomètre, 69.

Continuation des mêmes expériences avec des charges moindres.

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	OSCILLATIONS		DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE			VITESSES des BOULETS.
		de la pièce.	du pendule.			p	g	n	
	onces.			pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	16	443	340	82,9	12	1668	76,40	40,33	1312
2	16	437	327	81,6	9	1676	45	35	1287
3	8	282	229	81,0	7	1681	50	37	911
4	8	279	220	80,5	9	1688	50	40	884

La distance de la pièce et les boulets sont les mêmes que dans les expériences précédentes.

Longueur de la charge de 16 onces. 6,75.

Idem de 8 onces. 5,3.

MON ÉPROUVETTE.

onces. cordes. sinus-verse.

2

42 $\frac{1}{2}$

9

2

42 $\frac{1}{2}$

9

2

45

9 $\frac{1}{2}$

Avec de la poudre à gros grains qui servait aux expériences.

Cette dernière charge était formée de la poudre à petits grains qu'on avait retirée chaque jour au moyen d'un crible fait exprès; la poudre à gros grains était réservée pour les expériences. On voit par là que la poudre à petits grains est plus forte que la poudre à gros grains, du moins avec la charge de 2 onces.

En faisant osciller le pendule à la fin des expériences de ce jour, on a trouvé qu'il faisait 405 vibrations par 10 minutes, ou 40,5 vibrations par minute, tandis qu'au commencement, le pendule faisait 40,1 vibrations par minute, ce qui donne une différence de 0,4; mais en calculant les variations de la va-

leur de n par le changement de poids, on ne trouve qu'une différence de 2; par cette raison, j'ai mis pour n 40,2 au commencement, et 40,4 à la fin.

On a pesé et fait osciller le pendule pour trouver le poids et le centre de gravité.

Calculs relatifs au centre de gravité et au poids du pendule.

D'un côté.....	76,65	Poids initial.....	1629 $\frac{1}{2}$
De l'autre côté.....	76,80	Dix boulets logés.....	60 $\frac{1}{2}$
Moyenne.....	76,72	Poids des chevilles.....	6 $\frac{1}{2}$
<i>Idem</i> , au commencement.....	75,85	<i>Idem</i> , de 2 chevilles ajoutées. 2	} 69
Moyenne plus approchée.....	76,3	Somme.....	1698 $\frac{1}{2}$
Les poids ajoutés déplacent le centre de gravité de 0,4, dont moitié, 0,2.		Poids à la fin.....	1694
Distance initiale corrigée.....	76,1	Perte par évaporation.....	4 $\frac{1}{2}$.
<i>Idem</i> , finale corrigée.....	76,5		

176. 18 juillet 1791.

Baromètre, 29,75. Thermomètre, 71.

On a pesé et fait osciller la pièce, et on a tiré ensuite sans boulets avec les mêmes charges dont on s'était servi les deux jours derniers avec des boulets.

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	LONGUEURS des charges.	OSCILLATIONS de la pièce.
	onces.	pouces.	
1	32	6,8	294
2	32	6,5	295
3	24	5,3	220
4	24	5,3	221
5	16	3,7	141
6	16	3,7	140
7	8	2,9	63
8	8	2,8	64

ÉPROUVETTE.

onces.	cordes.	sinus-verse.	
2	43	$9\frac{1}{3}$	} poudre à gros grains.
2	43	$9\frac{1}{3}$	
2	45	$10\frac{1}{3}$	

Idem, à petits grains.

Vibrations de la pièce, 38 + par minute.

Voyez, pour les poids et les dimensions, les expériences du 13 juillet.

177. 21 juillet 1791.

Baromètre, 29,89.

Thermomètre, 67.

Le pendule étant réparé et ayant reçu un nouveau noyau, je l'ai fait peser et suspendre; il pesait 1630 livres. Comme il n'y a que 4 livres de différence entre ce poids et celui du pendule avant sa réparation, on peut admettre que les centres de gravité et d'oscillation n'ont pas changés, et sont restés les mêmes qu'au 16 du courant.

On a ensuite suspendu et pesé la pièce de 6 moyenne, qui a exactement le même diamètre que la pièce de 6 longue. En voici les dimensions et le poids.

	livres.
Poids de la pièce seule.....	1173
Idem de la ferrure.....	248
Total.....	1421

ÉPROUVETTE.

	pouces.	onces.	cordes.	sinus-verse.
Distance du centre de gravité à l'axe de rotation.....	34,9	2	43	$9\frac{1}{4}$
Idem de l'axe de la pièce à id.....	92,2	2	43	$9\frac{3}{4}$
Longueur de l'âme.....	56,65			
Diamètre de l'âme.....	3,65			
Vibrations par minute.....	39—			

On a tiré ensuite avec cette pièce les coups suivans :

Distance de la pièce au pendule.....	30 pieds.
Diamètre des boulets.....	3,55 pouces.
Poids des boulets.....	6 livres 1 $\frac{1}{2}$ once.

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	OSCILLATIONS		DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	VALEURS DE			VITESSES des BOULETS.
		de la pièce.	du pendule.			p	g	n	
	onces.			pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	32	719	404	82,5	9	1690	76,50	40,4	1586
2	32	716	412	84,6	18	1697	54	4	1585
3	24	648	401	85,9	22	1704	58	4	1527
4	24	"	388	85,6	18	1712	62	4	1490
5	24	615	371	85,8	26	1719	66	4	1430
6	16	501	344	88,1	19	1726	70	4	1298
7	16	490	320	87,3	21	1733	74	4	1224
8	8	318	227	87,1	9	1740	78	4	874
9	8	323	232	88,6	15	1747	82	4	882

Cette distance moyenne est probablement très près de la véritable : car en tenant compte de la gravité, ajoutant cette quantité à 76,5, distance primitive du centre de gravité, on obtient 76,5 la même courbe que celle qu'on a trouvée, moi en croix, le point le plus élevé de la parabole.

Vibration par secondes 178. 28 juillet 1791.

Baromètre, 29,83. Thermomètre, 66.

On a tiré la même pièce moyenne avec les mêmes charges qu'auparavant, mais sans boulet. Voici les résultats :

NUMÉROS.	CHARGES de poudre.	LONGUEURS des charges.	VIBRATIONS de la pièce.
	onces.	pouces.	
1	32	6,8	338
2	32	6,7	343
3	24	5,2	252
4	24	5,25	254
5	16	3,85	157
6	16	3,75	160
7	8	2,75	75
8	8	2,65	76

ÉPROUVETTE.

	onces.	cordes.	sinus-verse.	
	2	43	$9\frac{1}{4}$	
	2	$43\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{3}$	
On a réparé de nouveau le pendule, ajouté un nouveau noyau et posé de fortes bandes de fer en croix sur la face postérieure, pour s'opposer de ce côté à la rupture du bois. On l'a pesé et fait osciller pour trouver le centre de gravité.				
Poids			1803 livres.	
Centre de gravité			76,7 sur une face.	
<i>Idem</i>			77,2 sur l'autre face.	
D'où la moyenne			76,95.	

Cette distance moyenne est probablement très près de la véritable; car en tenant compte de l'augmentation de poids provenant des deux barres de fer en croix, dont on a parlé, le calcul donne 3,4 de déplacement pour le centre de gravité; ajoutant cette quantité à 76,5, distance première du centre de gravité, on obtient 76,9 la même environ que celle qu'on a trouvée.

179. 14 septembre 1791.

Baromètre, 30,2. Thermomètre, 70.

On a tiré contre le pendule précédent avec la pièce de 6 longue, afin de déterminer la résistance de l'air.

Distance de la pièce au pendule. 200 pieds.
 Diamètre des boulets. 3,55 pouces.
 Poids des boulets. 6 livres 1 $\frac{1}{2}$ once.

ÉPROUVETTE.				
onces.	cordes.	sinus-verse.	arc.	
2	43	$9\frac{1}{4}$	24,50	
2	$43\frac{1}{3}$	$9\frac{1}{3}$	25,0	
2	$43\frac{1}{3}$	$9\frac{1}{3}$	25,0.	

NUMÉROS.	CHARGES	LONGUEURS	OSCILLAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE			VITESSES
	de poudre.	des charges.	du pendule.	du point frappé à l'axe.	des CHEVILLES.	p	g	n	des BOULETS.
	onces.	pouces.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	32	9,9	371	82,5	20	1801	76,90	40,4	1560
2	32	9,9	359	81,8	17	8	93	"	1529 d
3	32	9,9	389	84,4	19	16	97	"	1614
4	24	8,4	345	89,0	18	23	77,00	"	1362
5	24	8,4	327	86,9	22	30	04	"	1328 d
6	24	8,3	324	80,6	20	32	07	"	1425
7	16	6,9	280	82,2	17	39	11	"	1238
8	16	6,8	298	90,6	15	46	14	"	1174
9	8	5,4	225	91,0	10	53	18	"	886
10	8	5,3	226	93,2	10	60	21	"	872

Des accidens ont rendu douteux les deuxième et cinquième coups ; à ce dernier coup, le boulet a traversé le pendule. A la fin des expériences de ce jour, le pendule s'est trouvé entièrement abîmé.

Vibration par minute. 40 $\frac{1}{2}$.

Le poids était au 28 juillet 1803 livres 0 once.

Idem des 9 boulets 54 13 $\frac{1}{2}$

Idem des chevilles 10 8

Total. 1868 5 $\frac{1}{2}$.

Le poids à la fin était de 1866 0.

Perte par évaporation. 2 5 $\frac{1}{2}$.

Cette perte est petite, surtout si l'on considère combien le temps a été sec. La toile huilée enveloppant le pendule a probablement prévenu en grande partie l'évaporation.

180. 21 septembre 1791.

Cette journée a été employée à faire osciller et à peser le nouveau pendule, composé d'un bloc entièrement nouveau, ayant 52 pouces d'épaisseur et une face de 23 pouces sur 17 pouces.

Poids du pendule.....	1662 livres.
Distance du centre de gravité.....	74,8 d'un côté.
<i>Idem</i>	74,3 de l'autre côté.
Distance moyenne.....	74,55
Ajoutez moitié du diamètre de l'axe.....	1,15
Distance du centre de gravité à l'axe de rotation.....	75,7.
181. 22 septembre 1791.	
Baromètre, 30.	Thermomètre, 60.

On a tiré contre ce pendule avec une pièce de 6 longue et ensuite avec une pièce de 6 courte, à la distance de 30 pieds du pendule, avec des charges de 3 et 2 livres de poudre. L'âme de la pièce légère avait 57,6 pouces de longueur. Depuis ce jour on n'a plus suspendu les pièces.

Ces pièces étaient montées sur des affûts marins, munis de roulettes, se mouvant sur une plate-forme unie, et l'on a tenu compte des reculs de la pièce et de l'affût.

ÉPROUVETTE.	onces.	cordes.	Oscillations du pendule en 3 minut.	35,6
	2	42 $\frac{1}{2}$	Diamètre des boulets.....	3,56
	2	42 $\frac{3}{4}$	Poids d' <i>idem</i>	6 livr. 1 $\frac{1}{2}$ once.

On a tiré les quatre premiers coups avec la pièce longue, et les cinq derniers avec la pièce courte.

NUMÉROS.	CHARGES	RECU	OSCILLAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE			VITESSES
	de poudre.	de la PIÈCE.	du pendule.	du point frappé à l'axe.	des CHEVILLES.	p	g	n	des BOULETS.
	onces.	pouces.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	3	67	482	87,0	20	1662	75,70	40,33	1749
2	3	69	479	83,2	15	1669	74	33	1826
3	2	48	431	86,1	16	1676	78	33	1596
4	2	49	456	87,5	16	1683	82	33	1669
5	3	83	445	82,8	63	1690	85	34	1728 d
6	3	72	437	88,0	16	1700	89	34	1607
7	3	72	412	83,0	13	1707	93	34	1614
8	2	58	383	80,3	15	1714	97	35	1558
9	2	57	378	80,0	10	1721	76,00	35	1558

182. 24 septembre 1791.

Baromètre, 29,98. Thermomètre, 60.

On a tiré quatre coups à une distance de 30 pieds du pendule suspendu le 22 septembre, les deux premiers avec la pièce de 6 moyenne et les deux derniers avec la pièce de 6 légère; les deux pièces ayant chacune 5 pieds de longueur. La charge était constamment de $1\frac{1}{2}$ de poudre. Mêmes boulets qu'auparavant, savoir, 3,56 de diamètre et 6 livres $1\frac{1}{2}$ once de pesanteur.

Les dimensions des pièces sont celles-ci :

PIÈCE MOYENNE.	PIÈCE LÉGÈRE.	ÉPROUVETTE.	
Longueur de l'âme..... 56,65 pouces.	57,6	onces.	cordes.
Diamètre d' <i>idem</i> 3,65	3,65	2	42 $\frac{3}{4}$
Poids de la pièce..... 1173 livres.	605 livres.	2	43.

NUMÉROS.	LONGUEUR	RECU	VIBRAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE			VITESSES
	des charges.	de la PIÈCE.	du pendule.	du point frappé à l'axe.	des CHEVILLES.	p	g	n	des BOULETS.
	pouces.	pouces	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	8,2	44	373	86,8	13	1728	76,04	40,35	1416
2	8,2	44	386	90,0	13	1735	08	36	1420
3	8,3	78	378	88,5	12	1744	12	36	1420
4	8,2	83	397	90,5	12	1749	16	36	1465

183. 26 septembre 1791.

On a démonté le pendule pour le réparer.

Poids du pendule au commencement..... 1662 livres

Idem des boulets et chevilles au 22 septembre.... 66 $\frac{1}{4}$

Idem au 24 septembre.... 27 $\frac{3}{4}$

Total..... 1756

Poids actuel..... 1755

Perte par évaporation..... 1 seulement.

184. 27 septembre 1791.

Le pendule ayant été réparé, on l'a pesé et fait osciller ce matin.

Poids du pendule	1759 livres
Revêtement en feuilles de plomb	19
Somme	1778.
Distance du centre de gravité au-dessous de l'axe.	76,3 pouces d'un côté.
<i>Idem</i>	76,1 de l'autre côté.
Moyenne distance	76,2.

On obtient par calcul la même distance 76,2, en tenant compte du poids des boulets et chevilles entrés dans le pendule les 22 et 24 septembre.

185. 30 septembre 1791.

Baromètre, 30,15. Thermomètre, 53.

Toute la poudre ayant été consommée, on en a pris d'autre qui, essayée à l'éprouvette, n'a pas été trouvée aussi forte que la précédente; alors on a passé cette poudre au tamis, et en n'en prenant que les grains les plus petits, on a composé une poudre d'une qualité à peu près égale à celle dont on s'était déjà servi. C'est avec cette poudre, ainsi tamisée, qu'on a fait les expériences suivantes: en tirant la pièce longue, montée sur son affût, à 115 pieds de distance du pendule.

Poids des boulets, comme précédemment, 6 liv. 1 $\frac{1}{2}$ once. Diamètre, 3,55.

ÉPROUVETTE.

	onces.	cordes.
$\frac{1}{4}$ 30	2	42
$\frac{3}{4}$ 27	2	42 $\frac{3}{4}$.

A la fin des expériences le pendule faisait 80 vibrations par deux minutes, ou 40 vibrations par minute, ainsi pour toutes ces expériences on a $n = 40$.

NUMÉROS.	CHARGES	LONGUEUR	RECU	OSCILLAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE		VITESSES
	de poudre.	des charges.	de la PIÈCE.	du pendule.	du point frappé à l'axe.	des CHEVILLES.	p	g	des BOULETS.
	onces.	pouces.	pouces.	c.	pouces.	onces.	livres.	pouces.	pieds.
1	48	12,9	56	396 d	85,0	12	1778	76,2	1597 d
2	48	12,9	67	444	86,2	12	1784	2	1771
3	48	13,0	65	448	90,3	12	1791	3	1715
4	32	9,9	47	382	82,0	11	1797	3	1616
5	32	9,9	49	410	87,2	12	1804	3	1637
6	24	8,5	33	356 d	83,5	14	1810	4	1491 d
7	24	8,4	31	322	80,5	11	1817	4	1405
8	24	8,3	32	340	83,6	11	1823	4	1433
9	16	6,9	22	276	79,9	8	1829	5	1223
10	16	6,9	20	304	89,5	11	1836	5	1207
11	8	5,4	9	214	88,4	15	1842	5	863
12	8	5,5	9	211	88,2	11	1849	6	857

Poids du pendule après les expériences 1855

Idem au commencement..... 1778

Poids des douze boulets..... 73 $\frac{1}{8}$

Idem des chevilles..... 8 $\frac{3}{4}$

Total..... 1860

A déduire pour enlèvement d'une
partie du revêtement de plomb.. 5

Reste..... 1855 comme au commencement.

L'enduit qu'on a mis sur le pendule est probablement cause de ce qu'il n'y
a pas eu de perte par l'évaporation.

186. 10 octobre 1791.

Baromètre, 29,27. Thermomètre, 57°.

Le pendule ayant de rechef été réparé, et ses faces couvertes de nouvelles
lames de plomb, on a tiré les coups suivans avec la pièce de 6 longue, montée
comme auparavant, et à 285 pieds de distance du pendule.

Seconde partie.

Poids des boulets, chacun..... 6 livres 1 $\frac{3}{4}$ onces.

Diamètre..... 3,55 pouces.

Poids du pendule..... 1861 livres.

Distance moyenne du centre de gravité..... 77 pouces.

Cette distance me paraît erronée, car ce pendule a presque le même poids que le précédent pour lequel cette distance était seulement de 76,6 pouces. J'ai donc pris pour moyenne distance 76,8. Le pendule faisait 40 oscillat. par min.

ÉPROUVETTE.

onces.	cordes.
2	42 $\frac{1}{4}$
20	42 $\frac{1}{4}$

NUMÉROS.	CHARGES	RECU	OSCILLAT.	DISTANCE	POIDS	VALEURS DE			VITESSES
	de	de la	du	du	des				des
	poudre.	PIÈCE.	pendule.	point	CHEVILLES.	p	g	n	BOULETS.
	onces	pouces.	e.	pouces.	onces.	livres.	pouces.		pieds.
1	48	49	374	85,8	16	1861	76,8	40	1571 d
2	48	63	432	92,9	15	1867	8	"	1674 d
3	48	54	416	91,5	14	1864	8	"	1641
4	32	36	329	79,5	13	1869	8	"	1496
5	32	36	358	84,6	12	1845	8	"	1513 d
6	24	"	277	74,7	"	1852	7	"	1329 d

Le n° 1 est douteux; au coup n° 2 le boulet sortit du pendule et rejaillit après avoir rompu une bande de fer et fait sortir des éclats de bois, ce qui rendit le recul du pendule trop grand. Au coup n° 5, il y eut encore un plus grand nombre d'éclats; l'élasticité des fibres ligneuses fit sauter une bande de fer pesant 29 livres, ce qui rendit la vibration du pendule plus grande qu'elle n'aurait été sans cet accident. Au coup n° 6, une autre bande se rompit et tout le pendule fut hors de service, en sorte qu'il n'y a que deux ou trois coups à peu près également sûrs.

187. 22 octobre 1791.

On a construit un nouveau bloc ayant 24 pouces d'épaisseur et une face de 24 pouces sur 18 pouces; on l'a pesé dans la fonderie, son poids était de 2128 livres, en comprenant 21 livres pour les lames de plomb plus considérables que les précédentes, à raison de la plus grande largeur du pendule.

188. 24 octobre 1791.

Ayant pesé de nouveau le pendule, on a trouvé que pendant les deux jours qu'il était resté à découvert dans la fonderie, il avait perdu 7 livres par l'évaporation, et qu'il ne pesait plus que 2121 livres; ayant été balancé pour trouver le centre de gravité, sa position a été trouvée la même pour les deux extrémités, savoir, à la distance de 77,7 au-dessous du milieu de l'axe de suspension.

189. 27 octobre 1791.

Baromètre, 29,96. Thermomètre, 46.

On a suspendu le nouveau pendule et tiré contre avec la pièce longue de 6 et montée sur un affût ordinaire, roulant sur une plate-forme, placée à la distance de 285 pieds.

ÉPROUVETTE.

onces.

cordes.

2

 $42\frac{1}{2}$ Valeur constante de $g = 77,7$

2

 $42\frac{3}{4}$ Idem..... de $n = 39,8$.

Avant d'être suspendu, le pendule pesait aujourd'hui 2119 livres seulement; pendant ces trois jours il n'avait perdu que 2 livres, ce qu'on peut attribuer à l'humidité de la température.

NUMÉROS.	CHARGES.		RECU de la PIÈCE.	OSCILLAT. du pendule.	DISTANCE du point frappé à l'axe.	POIDS des CHEVILLES.	POIDS du PENDULE.	VITESSES des BOULETS.
	POIDS.	LONGUEUR.						
	onces.	pouces.	pouces.	c.	pouces.	onces.	livres.	pieds.
1	32	9,9	22	299	88,1	14	2119	1412 d
2	32	9,9	22	"	"	"	2117	"
3	32	9,9	24	310	87,6	15	2115	1471
4	32	9,9	22	293	85,4	13	2117	1428
5	24	8,3	17	286	89,6	15	2119	1330
6	24	8,3	16	292	90,9	16	2121	1339
7	16	6,8	10	240	87,1	14	2123	1150
8	16	6,9	10	243	90,1	16	2125	1127
9	8	5,3	4	"	"	"	2127	"
10	8	5,4	4	"	"	"	2120	"
11	8	5,2	4	"	"	"	2113	"
12	8	5,3	"	"	"	"	2106	"

Poids des boulets 6 livres 1 $\frac{3}{4}$ onces.

Diamètre 3,56 pouces.

Le pendule s'est montré être d'un très mauvais bois, coupé dans la mauvaise saison, et si humide, que l'eau en décollait à chaque boulet qui entraît, et des éclats s'en détachaient à chaque coup.

Les deux premiers coups sont douteux, les boulets étant sortis du pendule; le premier boulet s'est enfoncé de 42 pouces avant de sortir. Aux six coups suivans, les boulets se sont logés dans le pendule; mais aux quatre derniers coups, les boulets sont sortis en frappant les bords et brisant quelques-unes des ferrures.

Le poids du pendule, à la fin des expériences, était . . 2099 livres.

Or au commencement le pendule pesait 2119

Poids des 6 boulets logés $36\frac{3}{4}$

Idem des chevilles $7\frac{1}{4}$

Total 2163

Différence des deux poids 64.

Cette diminution vient des pertes faites en éclats de bois, en ferrures et couvertures de plomb, principalement pendant les 4 derniers coups.

Il est à remarquer que les reculs sont à peu près dans le rapport, un peu moindre que celui des charges.

190. On a réuni, dans la table suivante, toutes les vitesses moyennes déduites par le calcul des expériences précédentes, et les différentes circonstances qui se rapportent à ces expériences que l'on trouve rangées ici par ordre de dates: elles ont été faites avec tout le soin et la patience qu'il était possible d'y mettre, eu égard à la grandeur du pendule, au calibre des boulets, et à la distance de la pièce au pendule.

1781	2119	1	1,88	200	22	0,9	32	1
"	2112	"	"	"	22	0,9	32	2
1781	2112	21	2,58	310	22	0,9	32	3
8c41	2112	23	2,58	300	22	0,9	32	4
0331	2112	25	0,98	330	17	3,8	21	5
0331	2112	26	0,99	300	16	3,8	21	6
0331	2112	27	1,78	300	10	8,8	10	7
7211	2112	28	1,99	300	10	8,8	10	8
"	2112	"	"	"	10	8,8	8	9
"	2112	"	"	"	10	8,8	8	10
"	2112	"	"	"	10	8,8	8	11
"	2112	"	"	"	10	8,8	8	12

1781 1/2 livres 1/2 onces 2119

1781 3/4 livres 2112

REVUE GÉNÉRALE.

Table synoptique des expériences précédentes.

DATES.	PIÈCES.	BAROMÈT.	CHARGES de poudre.	ÉPROUVETTE.	DISTANCE de la pièce au pendule.	VIBRATION DE LA PIÈCE		VITESSES calculées.	VITESSES. réduites.
						avec boulet.	sans boulet.		
			onces.		pieds.			pieds.	pieds.
Juillet.									
14	pièce longue.	30,0	32	42,5	30	638	294	1655	1663
14		"	24	"	"	556	220	1513	1521
16		"	16	"	"	440	140	1300	1306
16		"	8	"	"	280	63	898	902
21	pièce moy.	29,9	32	43	30	718	341	1585	1586
"		"	24	"	"	632	253	1460	1460
"		"	16	"	"	496	159	1261	1261
"		"	8	"	"	321	76	878	878
Septemb.									
14	pièce longue.	30,2	32	43,2	200	Recul.	"	1567	1564
"		"	24	"	"		"	1399	1396
"		"	16	"	"		"	1206	1204
"		"	8	"	"		"	879	877
22	longue... légère....	30,0	48	42,6	30	68	"	1788	1792
"		"	32	"	"	49	"	1633	1636
"		"	48	"	"	72	"	1621	1624
"		"	32	"	"	57	"	1554	1558
24	moyenne.. légère....	30,0	24	42,9	30	44	"	1418	1419
"		"	24	"	"	81	"	1442	1443
30	pièce longue.	30,2	48	42,4	115	66	"	1743	1755
"		"	32	"	"	48	"	1627	1639
"		"	24	"	"	32	"	1443	1454
"		"	16	"	"	21	"	1215	1224
"		"	8	"	"	9	"	860	867
Octobre									
11	pièce long.	29,3	48	42,3	285	55	"	1629	1644
"		"	32	"	"	36	"	1505	1522
"		"	24	"	"	36	"	1329	1342
27	pièce long.	30,0	32	42,6	285	23	"	1450	1454
"		"	24	"	"	17	"	1335	1339
"		"	16	"	"	10	"	1139	1142
"		"	8	"	"	4	"	"	"

Dans cette dernière table, les nombres qui sont dans la colonne éprouvette, désignent les cordes de vibrations communiquées par 2 onces de poudre, le rayon étant 100. Les vibrations de la pièce sont exprimées en cordes, le rayon étant 1000. Les boulets sont tous de 3,55 ou de 3,56 pouces de diamètre, et pèsent 6 livres $1\frac{1}{2}$ once : les vitesses réduites de la dernière colonne, sont relatives à un état où le baromètre serait à 30 pouces, et où l'éprouvette marquerait 43.

191. Les tables suivantes sont extraites de la grande table précédente. Les vitesses sont rapportées à des boulets de 3,55 ou 3,56 de diamètre, et pesant 6 livres $1\frac{1}{2}$ once, et à une poudre donnant 43 à l'éprouvette; le baromètre étant à 30 pouces de hauteur.

PIÈCE LÉGÈRE.			PIÈCE MOYENNE.		
DISTANCE.	CHARGE.	VITESSES.	DISTANCE.	CHARGE.	VITESSES.
pieds.	onces.	pieds.	pieds.	onces.	pieds.
30	48	1624	30	32	1585
»	32	1558	»	24	1460
»	24	1440	»	16	1260
»	»	»	»	8	877

Table des vitesses calculées et des vitesses régulières pour la pièce longue moyenne.

DISTANCE.	3 LIV. DE POUDRE.		2 LIV. DE POUDRE.		$1\frac{1}{2}$ LIV. DE POUDRE.		1 LIV. DE POUDRE.	
	Vitesses	Vitesses	Vitesses	Vitesses	Vitesses	Vitesses	Vitesses	Vitesses
	calculées.	régulières.	calculées.	régulières.	calculées.	régulières.	calculées.	régulières.
pieds								
30	1792	1810	1650	1673	1521	1506	1306	1306
115	1755	1745	1639	1616	1454	1453	1224	1259
200	»	1685	1564	1561	1396	1402	1204	1214
285	1644	1627	1522	1508	1342	1353	1142	1171

192. La série décroissante des vitesses n'est pas parfaitement régulière; les nombres sont altérés, çà et là, par de légères quantités qui, en disparaissant, n'affectent pas beaucoup les vitesses, et leur donnent de la régu-

larité; ce sont ces vitesses corrigées qu'on a placées dans la table suivante, avec leurs différences respectives.

DISTANCE.	DIFF.	3 LIV. DE POUDRE.		2 LIV. DE POUDRE.		1 $\frac{1}{2}$ LIV. DE POUDRE.		1 LIV. DE POUDRE.	
		Vitesses.	Différenc.	Vitesses.	Différenc.	Vitesses.	Différenc.	Vitesses.	Différenc.
30	85	1813	65	1676	58	1506	52	1306	47
115	85	1748	62	1618	56	1454	50	1259	45
200	85	1686	59	1562	54	1404	48	1214	43
285		1627		1508		1356		1171	

193. Substituant maintenant ces nombres qu'on vient de trouver dans la formule $r = \frac{v v'}{32s} b$, on formera la table suivante, des résistances correspondantes aux vitesses; il faut se rappeler que r désigne la résistance, v la vitesse moyenne, v' la vitesse perdue pendant le trajet s , égal ici à 85 pieds, et b le poids du boulet qui est de 6 livres 1 $\frac{1}{2}$ once, dans le cas actuel.

TABLE I ^{re} .		TABLE II ^e . RÉGULIÈRE.						
VITESSES	RÉSISTANC.	VITESSES	ONCES.	1 ^{re}	2 ^e	RÉSIST.	1 ^{re}	2 ^e
moyennes.	calculées.	régulières.		DIFFÉR.	DIFFÉR.	régulières.	DIFFÉR.	DIFFÉR.
pieds.	livres.	pieds.				livres.		
1193	115	1200	1840			115,0		
1237	125	1250	2030	190	0	126,9	11,9	5
1283	135	1300	2229	199	8	139,3	12,4	6
1378	154	1350	2436	207	7	152,3	13,0	4
1428	160	1400	2650	214	6	165,7	13,4	3
1480	172	1450	2870	220	4	179,4	13,7	3
1535	185	1500	3094	224	3	193,4	14,0	2
1590	199	1550	3321	227	2	207,6	14,2	1
1647	214	1600	3550	229	1	221,9	14,3	1
1654	219	1650	3780	230	0	236,3	14,4	0
1717	239	1700	4010	230	— 1	250,7	14,4	— 1
1781	259	1750	4239	229	— 3	265,0	14,3	— 2
		1800	4465	226		279,1	14,1	

Dans la première table on trouve les résistances correspondantes aux vitesses moyennes placées dans la première colonne. Comme ces vitesses ont des

des intervalles inégaux, et que les résistances correspondantes contiennent quelques irrégularités, on a composé la table 2, dans laquelle les nombres qui désignent les vitesses, augmentent progressivement de 50 en 50 pieds, et les résistances correspondantes sont aussi rendues régulières, comme on peut le voir dans la colonne des différences secondes; ainsi la seconde colonne de la seconde table, fait connaître la résistance qu'oppose l'air à un boulet de 3,55 pouces de diamètre lorsque ce boulet a une vitesse de 1200 pieds ou 1250, etc., par seconde.

Au moyen de ces vitesses et de ces résistances, on a construit, en suivant la méthode exposée, une seconde courbe, entièrement semblable à la première.

Observations sur les expériences de 1791.

194. Les expériences de cette année ont été faites avec trois pièces de 6 d'égal diamètre d'âme, mais de longueur et de poids différens.

Quelques boulets de 6 tirés contre le pendule, vers la fin de l'année 1790, avaient fait espérer qu'en renforçant un peu l'appareil, il serait à même de supporter le choc des boulets de ce calibre. Aussi, dans l'année suivante, on a continué les expériences avec des boulets pesant un peu plus de 6 livres.

A cet effet on a préparé des blocs de bois pour en faire des pendules d'une plus grande dimension que les précédens, et l'on a renforcé proportionnellement l'appareil en fer, soit pour contenir, soit pour suspendre le pendule; en sorte que tout le poids du pendule se montait à 3000 liv.

Les trois pièces de 6 mises en expériences étaient deux pièces courtes et une pièce longue; les deux pièces courtes étaient d'égale longueur, mais de poids différens, ainsi qu'on le voit ci-dessous.

PIÈCES.	POIDS.	A M E S.	
		LONGUEUR.	DIAMÈTRE.
	livres.	pouces.	pouces.
Longue....	1370	80,5	3,65
Moyenne...	1173	56,65	3,65
Légère.....	633	56,6	3,65

Ces poids sont ceux des pièces seulement; car lorsqu'on les suspendait, on se servait à cet effet d'un appareil en fer, le même pour toutes, et qui pesait 248 liv.

Les âmes des pièces sont terminées en une demi-sphère vers le fond.

Les charges de poudre étaient placées dans des enveloppes de papier fin, bien arrondies vers le bout pour les adapter à la forme hémisphérique du fond de l'âme.

Les pièces étaient tantôt suspendues et pouvaient osciller librement, et tantôt montées sur des affûts glissants, à roulettes, pour prévenir le recul qui, étant alors rendu très faible, permettait de reconnaître si la grandeur du recul influait sur la vitesse des projectiles.

Les boulets pesaient ordinairement 6 livres $1\frac{1}{2}$ once, et avaient 3,55 pouces de diamètre.

On tenait compte de l'état du baromètre et du thermomètre pour reconnaître l'influence de l'atmosphère sur la poudre et sur la résistance que l'air oppose aux boulets.

La poudre était essayée chaque fois, au moyen d'une éprouvette de nouvelle invention, qui montrait les plus petites altérations survenues dans la force de la poudre, et mettait à même de régler cette force en la prenant toujours au même degré. Il était très heureux que nous eussions un semblable instrument pour découvrir un fait important, auquel, sans cela, on n'aurait pas fait attention; la poudre dont nous nous étions servis l'année d'auparavant, donnait à mon éprouvette 35 à 36 oscillations, tandis que la poudre du premier baril avec laquelle nous avons commencé les expériences cette année, donnait constamment 42 à 43 oscillations; nous nous attendions à trouver la même espèce de poudre dans les autres barils; mais il n'en était pas ainsi: car après les premières journées d'expériences, en ouvrant le second baril, nous fûmes surpris de trouver que sa poudre était d'une force moindre, et tous les autres barils contenaient la même qualité de poudre que le second. Ainsi le premier baril seul renfermant une poudre d'une force supérieure, avait été placé accidentellement avec les autres. Comme nous étions déjà avancés dans nos expériences, il fallait, de toute nécessité, se procurer de la poudre de la même force que celle dont on venait de faire usage; l'idée nous est venue de passer la poudre des barils au crible, et prenant les plus petits grains, nous avons vu augmenter progressivement sa force; nous nous sommes arrêtés dans cette opération, lorsque l'éprouvette faisait 42 à 43 oscillations, comme pour la poudre du premier baril. On a toujours suivi la même pratique; ainsi l'éprouvette a non-seulement servi à découvrir une méprise qui aurait gâté toutes les expériences de cette année, mais elle a encore mis sur la voie de composer une poudre artificielle, semblable à la première poudre qu'on avait employée.

195. L'objet principal et direct des expériences était toujours de poursuivre les recherches sur la résistance de l'air en tirant contre le pendule des boulets d'un plus grand calibre que ceux déjà employés, et d'observer leurs vitesses perdues pendant leur trajet dans diverses masses d'air: on avait néanmoins encore d'autres objets en vue qu'on se proposait d'examiner dans le courant des expériences; par exemple, on désirait connaître l'influence que pouvaient avoir sur la vitesse du projectile, le recul, les différentes longueurs et pesanteur des pièces et les différentes charges de poudre. On s'est occupé aussi de la pénétration des boulets dans un bloc de bois d'orme; mais les boulets s'enfonçaient si profondément, qu'on ne pouvait trouver des sondes assez longues pour toucher les boulets enfoncés, quoiqu'elles eussent quelquefois plus de 26 pouces de longueur; ainsi les boulets étaient entrés dans la masse de bois à plus de $29\frac{1}{2}$ pouces de profondeur, puisque le boulet avait $3\frac{1}{2}$ pouces de diamètre.

Les tables rapportées aux articles 191, 192, 193, renferment des extraits de toutes les expériences choisies entre les plus exactes sur les distances, etc., et réduites toutes à ces mêmes données, savoir:

Poids du boulet	6 livres $1\frac{1}{2}$ once.
Diamètre d'id.	3,55 pouces.
Éprouvette	43.
Baromètre	30.

En comparant entre elles les effets des deux pièces moyenne et légère, ayant toutes deux même longueur environ, on voit qu'à égalité de charge de poudre, il n'y a aucune différence sensible entre les vitesses imprimées, quoique le poids d'une de ces pièces soit presque le double de celui de l'autre; on peut conclure de là, que la différence du poids des pièces n'a pas d'influence sensible sur la vitesse des projectiles. La même chose avait lieu, soit que ces pièces fussent librement suspendues, soit qu'elles fussent montées sur des affûts glissans, sans roulettes, et qui reculaient peu, ou dont le recul était tout-à-fait annulé par un obstacle.

Il résulte ensuite qu'en variant les charges de poudre, toutes choses d'ailleurs égales, les vitesses des projectiles sont à peu près proportionnelles à la racine carrée de la quantité de poudre ou de son poids.

En comparant les effets de la pièce longue ayant 80 pouces de longueur d'âme, et de la pièce courte ayant 56 pouces de longueur d'âme, on en a inféré qu'on n'obtient qu'un faible accroissement de vitesse dans le projectile, en augmentant la longueur des pièces; car l'excès de vitesse donné

par la pièce longue sur la pièce courte, s'élève seulement depuis $\frac{1}{15}$ jusqu'à $\frac{1}{10}$ de la vitesse communiquée par cette dernière.

Les comparaisons entre les pièces courtes et longues étant ainsi établies, on a continué les autres expériences avec la pièce longue seulement comme suffisante aux objets qui restaient à rechercher.

196. La table des vitesses avec lesquelles les boulets viennent frapper le pendule, fait voir que ces vitesses diminuent à mesure que les distances au pendule augmentent. La différence des vitesses montre la perte de vitesse éprouvée par le boulet, en traversant des masses d'air mesurées par les différences des distances; avec ces pertes de vitesse, on a calculé, à l'aide d'une formule, la résistance correspondante que l'air oppose au projectile.

En comparant, à égalité de charges, et à distances différentes, les vitesses produites par la pièce longue avec celles que donne une des pièces courtes, on voit que la plus grande vitesse est bientôt, par la résistance de l'air, réduite et ramenée à la vitesse que produit la pièce courte, et plus la charge est faible, et plutôt cette réduction a lieu; ainsi pour la charge la plus forte, celle de 3 livres, le projectile de la pièce longue est réduit à la vitesse de la pièce courte, après avoir fait un trajet de 95 yards; pour la charge de 2 livres, cette réduction a lieu à 67 yards de trajet, et avec 1 livre $\frac{1}{2}$ après un trajet de 50 yards, et avec 1 livre après un trajet de 38 yards; ce qui montre bien le faible avantage qu'on obtient sur les portées, en augmentant la longueur des pièces, et combien est sujette à erreur la méthode de chercher à comparer les vitesses des projectiles tirés des pièces de longueurs différentes, au moyen de leurs portées respectives, puisque les irrégularités du tir, ajoutant à ce qu'on vient de rapporter, rendent ce criterium très mauvais, toutes les fois qu'il s'agit de vitesses considérables.

Nos tables donnent une nouvelle confirmation du faible avantage qu'on obtient en faveur des portées, en augmentant les charges au-delà de ce qui est nécessaire pour communiquer une certaine vitesse au projectile, puisque la résistance de l'air agit si puissamment qu'elle a bientôt anéanti ou du moins considérablement diminué cet excès de vitesse.

On trouve, dans la dernière table de l'article 193, la résistance que l'air oppose à un boulet de 3,55 pouces de diamètre qui se meut avec de certaines vitesses, et cette colonne de résistances donne lieu à des observations analogues à celles qui ont déjà été faites sur les résistances éprouvées par des boulets d'un calibre moindre; on remarquera de plus, qu'à vitesses égales, les résistances éprouvées par différens boulets, sont à peu

près proportionnelles à la surface de ces boulets, ou, ce qui revient au même, à peu près proportionnelles aux carrés de leurs diamètres, les résistances étant un peu plus fortes que celles qu'on pourrait conclure de ces rapports pris rigoureusement. Cette circonstance prouve l'exactitude et la régularité de nos expériences, et par conséquent aussi l'exactitude de cette partie de la théorie des milieux résistans.

XXXV^e TRAITÉ.

Sur une éprouvette de nouvelle invention.

1. Nous avons vu, dans le précédent Traité, combien a été essentiel aux succès de nos expériences, l'usage de notre éprouvette, sans laquelle la plupart de nos recherches seraient restées infructueuses, et qu'aucune autre éprouvette ne pouvait y être substituée sans inconvénient, et ne répondait entièrement à l'objet qu'on se proposait. Il nous paraît donc très intéressant de faire connaître la construction et l'usage de cette éprouvette, qui procure de grands avantages toutes les fois qu'il s'agit de s'assurer de la qualité de la poudre; nous ne connaissons aucune autre machine qui remplisse ce but avec autant de commodité, d'exactitude et de rapidité; la facilité et la promptitude d'exécution sont telles, que le pesage des grains de poudre est la partie principale de l'opération; l'exactitude et l'uniformité sont telles, que plusieurs épreuves successives ne diffèrent communément entre elles que d'une petite fraction de degré, sur une étendue de 40 à 50 degrés mesurés sur l'instrument.

2. Cette machine remarquable par la simplicité de sa construction, n'est autre chose qu'une petite pièce ou mortier suspendu librement à un axe, et qu'on charge avec de la poudre, sans boulet; en mettant le feu, le recul ou l'oscillation de la pièce, mesuré avec facilité sur l'instrument, indique la qualité ou la force de la poudre.

Le célèbre Robins, dans son Traité d'Artillerie, a donné la première idée de cette éprouvette si simple et si exacte, et il en fait, avec raison, le plus grand éloge; une autre éprouvette construite sur le même principe, et probablement d'après l'indication de Robins, a été proposée par M. Baumé, chimiste français, qui l'a décrite dans ses *Elémens de Chimie*; mais les formes de l'instrument sont si incommodes, que sa belle simplicité n'est plus d'aucune utilité. Ma construction en diffère totalement, est

extrêmement commode, et n'a de commun avec celle-ci que le principe de recul oscillatoire dû à M. Robins (1).

3. Ce sont les expériences faites avec le pendule, pour connaître la force de la poudre, qui ont suggéré à M. Robins l'idée de son éprouvette. Celle que nous allons décrire est due aux circonstances suivantes: M. le major, aujourd'hui le général Congrève, avait fait, en ma présence, des expériences qui ne le satisfirent point; animé d'un vif désir de perfectionner toutes les branches de son arme, il daigna m'exhorter à diriger mes pensées vers cet objet, et de chercher à rectifier les anciennes éprouvettes, ou, s'il était possible, d'en trouver une nouvelle plus exacte et plus expéditive. Dans une de nos conversations sur cette matière, le major me fit voir le dessin d'une éprouvette qu'il m'apprit être décrite dans les *Éléments de Chimie* de Baumé. Je reconnus de suite que l'instrument était basé sur le principe publié, quarante ans auparavant, par M. Robins, et je trouvai que la machine de M. Baumé n'était bien appropriée ni à la facilité ni à l'exactitude des opérations.

4. Par suite de ces renseignemens, et après des essais et des tentatives réitérés, j'ai vu couronner du plus complet succès mon désir d'avoir une éprouvette invariable avec laquelle on puisse essayer la poudre d'une manière prompte, aisée et commode, avec constance et exactitude dans les résultats. Elle a été généralement approuvée par toutes les personnes impartiales et par les juges compétens qui ont assisté aux diverses séries d'expériences faites avec cet instrument. Ma machine se compose, comme il a déjà été dit, d'une petite pièce de bronze ou d'un mortier suspendu à une tige ou verge métallique qui tourne autour d'un axe supporté par un châssis ferme et solide entre lequel la pièce oscille dans un arc circulaire. La tige se divise un peu au-dessous de l'axe en deux branches qui aboutissent à la pièce, et dont les extrémités sont solidement fixées, l'une près de la bouche et l'autre près de la culasse. L'extrémité supérieure de la tige est attachée à l'axe qui tourne avec entière liberté par les deux extrémités, dans les coussinets fixés au châssis. Par cette disposition, la tige et la pièce oscillent ensemble avec un très léger frottement dans un plan vertical. On introduit dans la pièce une quantité déterminée de la poudre qu'on veut essayer, et sans boulet; on met le feu à la charge, et

(1) Une éprouvette de ce genre a été construite par le chevalier Darcy, en 1754; voyez son *Essai d'une Théorie d'Artillerie*, page 25. L'arc divisé est placé au-dessus de l'axe de rotation.

la pièce est forcée d'osciller et de décrire un arc plus ou moins grand, selon la qualité de la poudre et sa force.

5. Un arc en cuivre, ou mieux, un arc argenté est fixé vis-à-vis les deux branches de la tige, et sert à mesurer la grandeur du recul, et conséquemment la force de la poudre. L'arc porte diverses sortes de graduations que l'on consulte selon l'objet que l'on a en vue; ainsi l'arc est divisé d'abord en parties égales pour connaître généralement l'angle de vibration qui est mesuré par des degrés égaux entre eux; l'arc est divisé ensuite en parties inégales correspondantes respectivement aux cordes et aux sinus-verses des arcs décrits, afin de trouver ou la vitesse d'oscillation, ou la force et l'intensité de la poudre. Dans notre éprouvette, l'arc porte à la fois ces trois échelles; les divisions sont indiquées par un index concentrique qui embrasse très étroitement, par une douille, l'axe de rotation; mais laissant toutefois la liberté de tourner l'index aisément autour de l'axe avec la main. Au moyen d'un ressort, la douille de l'index est pressée modérément et dans le sens de l'axe de suspension contre la douille de la tige qui est invariablement soudée au même axe. L'index et la tige se trouvent ainsi légèrement liées ensemble; ils vibrent toujours en même temps que l'axe, à moins que l'index ne soit arrêté par quelque obstacle. Lorsque la machine est en repos, et que l'index est sur la première division de l'échelle, une branche additionnelle de cet index, et formant avec lui un levier coudé, pose alors sur une barre d'arrêt placée en travers du châssis, de manière que le feu étant mis à la poudre, la pièce et l'arc rebroussent ensemble, mais l'index ne peut participer à ce mouvement, étant arrêté par la barre sur laquelle pose sa branche additionnelle, et les divisions de l'axe passent successivement vis-à-vis l'index, jusqu'à ce que l'oscillation ait atteint toute l'étendue que la force d'explosion a été en état de lui donner. Quand la pièce revient, elle emporte avec elle l'index (à cause de la légère pression exercée par la tige sur le ressort) qui indique alors, par le point vis-à-vis duquel il se trouve, l'étendue de la vibration; en mettant doucement fin à ces vibrations, on peut lire avec facilité le nombre des degrés, et en tenir note.

6. Les avantages particuliers à cette éprouvette, et qui la distinguent de toutes celles du moins venues à ma connaissance, sont ceux-ci :

1°. La position commode au-dessous de l'axe de rotation de l'arc mesurant le recul.

2°. Les divisions de cet arc non-seulement en degrés égaux entre eux,

mais aussi les divisions inégales en cordes et sinus-verses de ces degrés qui font connaître de suite la vitesse du boulet et la force de la poudre.

3°. La manière dont l'index appliqué et pressé légèrement par un ressort contre la partie circulaire de la tige, est arrêté par une barre qui l'empêche de se mouvoir avec la tige, pendant que celle-ci est portée en arrière avec l'arc et la pièce.

7. Pendant l'année 1783, j'ai fait exécuter à Londres deux de ces éprouvettes par des artistes intelligens et travaillant sous ma direction. La première était un modèle, en petit, d'une pièce de 6 pouces de longueur, et lorsqu'on la chargeait avec une petite quantité de poudre, les résultats étaient très satisfaisans, nonobstant la grande diminution de longueur. La deuxième machine avait les dimensions complètes, la pièce ayant $2\frac{1}{2}$ pieds de longueur; mais elle était exécutée en bois, et devait servir de modèle à la machine en métal. Ces deux machines furent déposées au grand Conservatoire de Wolwich où est maintenant l'Arsenal royal, et dont M. le major Congrève était directeur. Avec ce modèle en bois, on construisit, à ma demande, une autre machine en fonte dans l'atelier de M. le major, et les ordres furent donnés à ce sujet par M. le duc de Richemont, grand-maître de l'Artillerie, qui daigna aussi ordonner des épreuves particulières dont on aurait à lui rendre compte. Le tout fut exécuté conséquemment avec l'approbation et à la grande satisfaction des officiers de l'état-major. Cette machine, après avoir servi à plusieurs expériences, fut placée au Conservatoire, à côté des deux premières; mais elles furent toutes détruites, avec beaucoup d'autres objets, dans l'incendie qui consuma malheureusement ce superbe établissement, pendant l'année 1802. J'espère toutefois qu'une nouvelle machine sera construite et placée dans le nouveau Conservatoire, pour les besoins du service.

8. *Construction et description de l'éprouvette.*

La planche I montre la machine et ses parties en différentes positions; elle est adaptée à une pièce de bronze de $27\frac{1}{2}$ pouces de longueur, les diamètres de l'âme ayant 1,7; elle était conséquemment capable de recevoir un boulet pesant $11\frac{1}{2}$ onces, environ. On peut trouver les dimensions de la machine, en pieds ou en pouces, au moyen de l'échelle.

Explication des figures.

Figure 1^{ère}. Élévation de la machine avec son châssis en l'état de repos, pour faire voir la manière dont la pièce est suspendue. *a, b*, deux

branches d'acier de la tige; *cd* le cadran; *fg* l'index; *eg* partie de l'index s'appliquant contre la barre d'arrêt qui traverse le châssis par en haut.

Fig. 2. Vue de face. *hi*, axe d'acier autour duquel oscillent la pièce et le cadran.

Fig. 3. Machine vue en perspective. Les mêmes objets, dans toutes les figures, sont désignés par les mêmes lettres.

Fig. 4. Plan du châssis vu d'en haut, ou projection horizontale du châssis.

Fig. 5. Pièces de la machine vues séparément.
hi, axe d'acier.

feg, l'axe du cadran dont la partie ou bras *eg* reste sur la barre d'arrêt *kl*, et empêche l'index de prendre part à la première oscillation. Le bras *f* a deux ouvertures qui laissent voir les divisions tracées sur le limbe de l'arc; *mn*, ressort à paillette, qui sert à presser la douille *e* de l'index contre le plateau *o* de la tige, au moyen de la clavette *p* placée derrière le ressort.

9. Quoique la machine ne soit ici que pour une petite pièce, il est bien entendu qu'on peut aussi la construire pour un petit mortier ou pour une pièce courte, ce qui serait probablement plus convenable sous plusieurs rapports, les pièces courtes étant plus faciles à charger et à nettoyer, et on les fait osciller plus commodément. Outre cela, l'action de la poudre dans ces pièces peut être regardée comme l'effet d'une impulsion unique, et alors la force peut être regardée comme proportionnelle à la vitesse imprimée, et conséquemment proportionnelle à la corde de l'arc d'oscillation; ainsi on n'aurait besoin de tracer qu'une seule échelle de division sur le limbe du cadran, savoir, l'échelle des cordes.

10. *Manière de construire l'échelle des cordes sur le limbe du cadran.*

On devra prendre un rayon d'un peu plus de 12 pouces de longueur et un arc dépassant un peu le quart du cercle. Du centre *e*, avec un rayon que vous supposez être de 12 pouces, décrivez un quart de cercle sur la face *cd* de l'instrument; sur cet arc portez successivement toutes les cordes, ainsi qu'on va le dire. Ces divisions ne sont pas égales comme les divisions des degrés; mais elles décroissent successivement à partir de la première jusqu'à la dernière qui est la plus petite; la méthode suivante nous paraît la meilleure pour opérer cette division.

Ayant marqué les extrémités *c* et *d* du cadran par des traits ou des points très fins, prenez une ouverture de compas égale à la distance de ces extrémités; portez cette ouverture qui est la corde de 90° , sur une droite très fine, tracée d'avance sur un plateau de métal, ou sur toute autre matière solide et bien unie: divisez cette droite en autant de parties égales que l'arc doit avoir de divisions, en 100 parties par exemple, ce nombre sera probablement assez grand et suffisant pour la pratique; ensuite portez successivement les divisions de la droite sur l'arc en partant toujours du commencement de cet arc. Alors, pour diviser l'arc d'abord de 10 en 10, prenez sur la droite, avec le compas, les 10 premières divisions; posez un pied du compas en *c*, et décrivez avec cette ouverture un petit arc qui coupe le quadrant en un point qui sera la dixième division du quadrant; prenez de suite les 20 premières divisions de la droite, et portez les de la même manière sur l'arc, en partant toujours du point *c*, et vous aurez la 20^e division, et opérez de même pour obtenir la 30^e, 40^e, 50^e, 60^e, 70^e, 80^e, 90^e division; vous opérez de même pour obtenir les cordes de l'arc de 5 en 5 et puis de 2 en 2, et ensuite les unités des cordes si la largeur du limbe le permet. Finalement on écrira à côté des divisions les numéros correspondans, et l'arc ainsi disposé fera connaître la vitesse des projectiles et la force de la poudre.

II. Observations et renseignemens sur la manière de se servir de l'éprouvette.

Nous répéterons la remarque déjà faite, que l'éprouvette actuelle n'est pas affectée exclusivement à la petite pièce dont il a été question; mais cet instrument peut encore servir, soit à une pièce courte, soit à un mortier. La pièce que nous avons employée est le modèle d'une pièce courte chargée avec 2 ou 3 onces de poudre; un grand nombre d'épreuves ont donné des résultats très satisfaisans, nonobstant la légèreté du calibre. Si on voulait se servir de charges plus considérables, il faudrait nécessairement suspendre à l'instrument des pièces courtes ou des mortiers. Cependant la pièce légère actuelle serait encore suffisamment exacte et régulière; car, quoiqu'on ait employé dans les expériences 2 onces de poudre commune, on pourrait, sans nuire à l'exactitude, prendre une charge plus grande ou moindre; l'instrument est d'une telle sensibilité, qu'il découvre les moindres variations survenues dans la quantité ou dans la

qualité de la poudre, et il est d'une pratique si simple, si expéditive et si aisée, qu'un soldat, ou toute autre personne, peut apprendre à s'en servir avec sûreté et diligence, en moins de 5 minutes, et tenir compte de ses indications: ainsi nous sommes en possession d'une machine qui réunit les précieuses qualités de l'exactitude, de l'uniformité, de la facilité et de la promptitude. La description précédente de la machine suffit pour mettre un artiste quelconque en état de l'exécuter. On peut faire construire les différentes pièces, et surtout les petites pièces de la machine à Londres ou ailleurs, et les envoyer ensuite dans des endroits éloignés, où l'on peut les réunir, et s'en servir avec un mortier ou un pierrier.

Il est utile, pour la régularité des opérations, de choisir une des divisions de l'instrument pour terme de comparaison, et on fera une marque à cette division; on établira cette marque, en chargeant la pièce avec une poudre d'une qualité ou d'une force connue: cette marque servira, dans chaque épreuve, à remettre la machine dans la même position, exactement ou à peu près, si l'on prend la même quantité et la même qualité de poudre. Dès qu'on se servira d'une autre poudre, la machine montrera la différence avec une précision extrême, soit que la nouvelle qualité soit supérieure ou inférieure à la première.

12. *Manière de se servir de l'éprouvette.*

Introduisez dans la pièce 2 onces de poudre ou quelque quantité plus grande ou moindre: il faut la mettre sans enveloppe, et sans la fouler; on ne prendra ni sachets, ni cartouches, ni boulets. A cet effet, versez de la poudre soigneusement dans la lanterne, ensuite la pièce étant en repos et suspendue horizontalement, introduisez avec attention la lanterne dans la pièce, jusqu'à ce qu'elle touche le fond de l'âme; la lanterne étant dans cette position, ordonnez à un aide servant d'incliner doucement la pièce, de manière que la bouche soit un peu plus élevée que la culasse; la pièce étant dans cet état, faites faire un demi-tour à la lanterne, de manière que toute la poudre tombe au fond de l'âme; ceci fait, retirez la lanterne, et en la retournant, introduisez son extrémité plate, poussez légèrement la poudre, et réunissez-la bien au fond de l'âme, et ensuite, remettez doucement la pièce dans sa première position horizontale.

13. La pièce étant ainsi chargée, il faut, avant de la tirer, placer exactement l'index sur la première division du limbe, cela s'effectue de cette manière: on place d'abord l'index à peu près, et à la main, près de

cette première division; ensuite on l'y amènera exactement, au moyen d'une vis verticale de rappel qui traverse l'extrémité du bras de l'index en g au-dessus de la traverse du châssis; avec une main on pressera la tête de la vis contre la traverse, et de l'autre main on fera tourner lentement la vis, et conséquemment aussi l'index, en avant et en arrière, jusqu'à ce qu'on aperçoive exactement la première division du limbe à travers les ouvertures pratiquées à l'extrémité de l'autre bras de l'index.

14. Avant de tirer la pièce, il faut faire en sorte que la douille de l'index entourant l'axe, s'applique contre, avec frottement modéré, afin qu'il n'y ait pas d'obstacle sensible au recul de la pièce, et encore pour que l'index étant placé dans un endroit, ne quitte pas l'axe ou l'arc lorsque la pièce revient de sa première oscillation.

15. La pièce étant chargée et l'index placé sur la première division du limbe, on y met le feu de cette manière: prenez une étoupille très fine, de 3 à 4 pouces de longueur, et introduisez-la dans la lumière, jusqu'à ce qu'elle touche la poudre, l'autre partie de la mèche reste suspendue en dehors; mettez le feu à cette partie extérieure par le moyen d'un porte-feu que vous retirez promptement, de peur qu'il ne soit frappé par la tige de l'éprouvette, et qu'il n'empêche ainsi le recul d'avoir son effet entier. Lorsque la pièce revient de son recul, vous arrêterez doucement les vibrations, sans toucher à l'index, et vous remarquerez la division du limbe que l'index indiquera; le nombre correspondant à cette division donnera la force de la poudre. Pour plus de certitude, on peut répéter la même expérience deux à trois fois, et prendre une moyenne arithmétique entre les nombres trouvés.

XXXVI. TRAITÉ.

Détermination de la résistance de l'air, au moyen d'une machine à rotation.

1. Les procédés décrits dans le 34^e Traité, pour déterminer la résistance de l'air, ne sont praticables que lorsque les projectiles ont de grandes vitesses; car, lorsque cette vitesse est au-dessous de 300 pieds par seconde, les boulets entrent difficilement dans le bloc du pendule; le plus souvent les boulets rejaillissent en arrière, et rendent ainsi nuls les résultats de l'expérience; par cette raison, pour mesurer les résistances

qu'oppose l'air à des projectiles mus avec de faibles vitesses, nous avons eu recours à d'autres moyens, et nous nous sommes servis, à cet effet, d'une machine à rotation; nous avons été assez heureux pour retrouver la même dont M. Robins a fait usage, ou du moins celle qui a été exécutée sous la direction de M. Elicot, par les mêmes ouvriers qui ont travaillé pour M. Robins.

2. C'est avec cette machine que M. Robins a fait une suite d'expériences devant les membres de la Société royale de Londres; il avait principalement en vue d'établir les deux propositions suivantes: 1°. la résistance qu'oppose l'air à un boulet de fer de 12 livres, se mouvant avec une vitesse de 25 pieds par seconde, est à peu près égale à une demi-once avoir-du-poids; 2° dans de certaines limites, la résistance de l'air est à peu près proportionnelle au quarré de la vitesse des projectiles. La machine de M. Robins est décrite dans le 1^{er} volume de son ouvrage, page 202. Nous allons rapporter, presque textuellement, la description donnée par l'auteur.

3. A la suite des deux propositions mentionnées, M. Robins ajoute :
« Elles ne sont ni inconnues, ni douteuses, mais elles forment la base
» d'autres assertions que l'on a jusqu'ici contestées ou niées; il était es-
» sentiel de démontrer la vérité de ces deux faits fondamentaux par des
» méthodes plus simples et plus sûres qu'on ne l'a fait jusqu'à présent :
» à cet effet, j'ai imaginé une machine représentée dans la planche II,
» et qui a été parfaitement exécutée, sous la direction de M. Elicot,
» avec toutes les parties nécessaires pour ses différens usages; elles ne
» sont pas toutes indiquées dans la figure où l'on n'a rapporté que les
» objets essentiels pour l'intelligence de l'instrument. BCDE est un cy-
» lindre de cuivre mobile autour d'un axe, sans aucun frottement sen-
» sible; les constructions faites pour diminuer ce frottement ne sont pas
» détaillées dans la figure. Le châssis dans lequel le cylindre se trouve
» engagé, est placé de manière que l'axe soit dans une position verticale.
» L'axe lui-même est prolongé au-delà de la partie supérieure du châs-
» sis; à l'extrémité de l'axe est fixement attaché un corps léger, ayant
» la forme d'un cône creux. Une longue pièce de bois GH, très
» mince et taillée en lame d'aviron, part de la base du cône, et porte
» à son extrémité le corps léger destiné à se mouvoir circulairement dans
» l'air; ici c'est une petite boule P; un fil d'archal est fixé d'un côté au
» sommet du cône, et de l'autre à l'extrémité du bras GH; il a pour
» but d'empêcher le bras GH de fléchir sous le poids du corps P; le cy-

» lindre BCDE est enveloppé d'un fil de soie très mince; après avoir fait
 » plusieurs tours, ce fil passe par une poulie L, et tient suspendu le
 » poids M. Ce poids M, en descendant en vertu de la pesanteur, fait
 » tourner le cylindre, le bras GH et le corps P qui lui est attaché; tant
 » que la résistance qu'oppose l'air au mouvement du bras GH et du
 » corps P, est moindre que le poids M, il est évident que la vitesse de
 » celui-ci ira en augmentant, et conséquemment aussi la résistance de
 » l'air, jusqu'à ce que cette résistance et le poids M soient devenus à
 » peu près de même grandeur, alors le mouvement rectiligne du poids M,
 » le mouvement circulaire du corps P seront chacun sensiblement uniforme.
 » D'après cela il est facile de voir comment on peut, au moyen de
 » cette machine, mesurer la résistance qu'oppose l'air au corps P.

» 4. La méthode la plus simple à suivre dans cette recherche, est celle-
 » ci : attendez le moment où la machine parvient au mouvement uniforme,
 » ce qui arrive ordinairement après 5 à 6 révolutions; alors observez le
 » temps que la machine met à faire une révolution, et prenez le temps moyen
 » de plusieurs révolutions; ensuite détachez le corps P et le poids M, et
 » remplacez celui-ci par un poids moindre, tel qu'il imprime au bras GH
 » seul le mouvement uniforme qu'il avait lorsqu'il portait le corps P, à quoi
 » l'on parviendra facilement, par tâtonnement. L'excès du poids M, sur le
 » poids moindre qui l'a remplacé, est évidemment la mesure de la résis-
 » tance qu'éprouve le corps P de la part de l'air; cet excès étant multi-
 » plié par le rapport de la longueur du bras GH au rayon du cylindre, don-
 » nera la mesure absolue de la résistance, et comme l'on connaît la durée
 » d'une révolution, et conséquemment la vitesse de rotation, on pourra aussi
 » évaluer la résistance de l'air, quelle que soit la vitesse du mobile.

» 5. Lorsqu'on ôtait le corps P, on substituait à sa place un morceau
 » de plomb aplati, de même poids, qu'on plaçait horizontalement dans
 » la direction de l'axe, et qui tournait avec cet axe; nous prenions cette
 » précaution afin qu'on ne pût objecter que le corps P retardait la marche du
 » poids M par son poids aussi bien que par sa résistance. Les géomètres, ac-
 » corderont aisément que cette précaution n'était pas indispensable.

» 6. Les dimensions des différentes parties de la machine sont:

» Diamètre du cylindre BCDE, compris le diamètre du fil
 » de soie..... 2,06 pouces.
 » Longueur du bras GH mesurée depuis l'axe jusqu'à la
 » surface du globe P..... 49,5.

- » Le globe P, fait en carton, et recouvert parfaitement
 » d'un papier marbré, avait à peu près le diamètre
 » d'un boulet de 12, ci 4,5 pouces.
 » De là on conclut que le rayon du cercle décrit par le
 » centre du globe était..... 51,75.
- » 7. Après avoir fixé la sphère à l'extrémité du bras, et suspendu un
 » poids d'une demi-livre en M, à l'extrémité du cordon, on attendit l'ins-
 » tant où le mouvement de translation du poids M, ainsi que celui de ro-
 » tation du corps P, seraient devenus sensiblement uniformes; et après trois
 » révolutions crues nécessaires pour cet objet, on trouva que
- » Les 10 suivantes eurent lieu en..... $27 \frac{3}{4}$.
 » 20 idem, en moins de..... 55.
 » 30 idem, en..... $82 \frac{1}{2}$.
 » En sorte que la 1^{re} dizaine employa..... $27 \frac{3}{4}$.
 » La dizaine suivante..... $27 \frac{1}{4}$.
 » Et la 3^e dizaine..... $27 \frac{1}{2}$.
- » Ces expériences démontrent suffisamment que, même avec un poids
 » d'une demi-livre, le plus léger que nous ayons employé, le mouve-
 » ment de la machine devient assez uniforme, après les trois premières
 » révolutions.
- » 8. Pour démontrer ensuite les deux propositions énoncées ci-dessus,
 » on fit les expériences suivantes, les temps désignés étant donnés par des
 » montres à arrêts, qui différaient rarement d'une demi-seconde entre elles.
- » Le globe étant fixé à l'extrémité du bras, on suspendit en M un poids
 » de $3 \frac{1}{4}$ livres, et après avoir laissé achever 10 révolutions, les 20 sui-
 » vantes se firent en $21 \frac{1}{2}$.
- » Ayant alors enlevé le globe, et substitué à sa place une plaque de
 » plomb du même poids, on trouva qu'au lieu de $3 \frac{1}{4}$ livres, un poids de
 » 1 livre ferait tourner la machine en moins de temps qu'auparavant, puis-
 » qu'après avoir de nouveau laissé écouler 10 révolutions, les 20 suivantes
 » n'employèrent que 19 secondes.
- » D'où il suit que pour avoir la résistance du bras, il faut déduire au
 » moins 1 livre des $3 \frac{1}{4}$ livres d'abord suspendues; et par conséquent la résis-
 » tance du globe lui-même n'est pas moindre que l'effort de $2 \frac{1}{4}$ livres agis-
 » sant en M; et comme il résulte des dimensions précédentes, que le rayon
 » du cylindre est à peu près $\frac{1}{50}$ du rayon du cercle décrit par le centre du
 » globe, il s'ensuit que la résistance absolue du globe faisant 20 ré-

» volutions en $21 \frac{1}{2}$ (ce qui, d'après les mesures précédentes, répond à
 » une vitesse d'environ 25 pieds par seconde), il s'ensuit, dis-je, que la
 » résistance de la sphère dans ce cas, est au moins la 50° partie de $2 \frac{1}{4}$
 » livres, ou la 50° de 36 onces; ce qui fait plus de $\frac{1}{2}$ once; et le globe
 » étant à peu près de la grosseur d'un boulet de 12 livres, il en résulte une
 » démonstration incontestable de notre première proposition, savoir: que
 » la résistance de l'air, sur un boulet de fer de 12 livr., se mouvant avec une
 » vitesse de 25 pieds par seconde, est au moins de $\frac{1}{2}$ once (avoir-du-poids).

» 9. Les expériences qui suivent ont été faites dans la vue d'examiner
 » la seconde proposition. Pour cet effet, on a suspendu successivement en M,
 » différens poids dans le rapport des nombres 1, 4, 9, 16; et laissant
 » s'écouler 10 révolutions, voici les résultats observés sur les suivantes:

» Avec 1 livre le globe décrit 20 révolutions en. $54 \frac{1}{2}$.
 » ou bien il décrit 10 révolutions en. $27 \frac{1}{4}$.
 » Avec 2 livres il décrit . . . 20 en. $27 \frac{1}{2}$.
 » Avec 4 livres il décrit . . . 30 en. $27 \frac{1}{2}$.
 » Avec 8 livres il décrit . . . 40 en. $27 \frac{1}{2}$.

» d'où il résulte, qu'à des résistances proportionnelles aux nombres 1, 4,
 » 9, 16, etc., répondent pour le corps en mouvement, les vitesses propor-
 » tionnelles aux nombres 1, 2, 3, 4; ce qui démontre avec beaucoup d'exac-
 » titude, dans les limites de ces expériences, notre deuxième proposition:
 » que la résistance de l'air sur un corps en mouvement, est à peu près
 » comme le carré de la vitesse de ce corps, c'est-à-dire qu'elle est qua-
 » druple si le corps se meut avec une vitesse double; qu'elle est égale
 » à 9 fois la résistance primitive, si le corps se meut avec une vitesse
 » triple; ainsi de suite. » (1)

10. Ces expériences de M. Robins suffisent pour donner une idée de
 sa machine; je vais maintenant rendre compte des nombreuses et diver-
 ses expériences que j'ai faites moi-même à l'aide de cette même machine,
 pendant les années 1786 et 1787. La machine ayant été nettoyée et con-
 venablement arrangée pour la faire agir facilement, je fis confectionner
 trois demi-globes en carton, de différens volumes, tant pour estimer la
 résistance sur des corps de différentes grandeurs, que pour avoir la diffé-
 rence de résistance entre la surface plane du cercle et la surface convexe
 de l'hémisphère. Le poids et les dimensions de chaque hémisphère étaient:

(1) Voir le Traité de Mathématique de Robins, traduit de l'anglais par M. Dupuy fils,
 aide-professeur aux Écoles royales d'Artillerie, t. VIII, 1771, page 365.

NUMÉROS.	DIAMÈTRE. Pouces.	AIRE DU CERCLE EN		
		POUCES carrés.	PIEDS carrés.	POIDS. onc. dr.
1	4,75	17,7	$\frac{1}{8}$	2 5
2	5,1	21,2	$\frac{5}{34}$	2 11
3	6,375	32,0	$\frac{2}{9}$	4 3

J'ai fait aussi préparer trois petites plaques de plomb taillées en biseau, pour les fixer horizontalement sur le bras, après que chaque hémisphère aurait été enlevée, afin de prévenir toute objection, ainsi qu'a fait M. Robins pour la même raison; je fixai un fil de laiton, tendu depuis le sommet de l'axe jusqu'à l'extrémité du bras, et qui le maintenait dans la position horizontale.

Mai 1786.

11. On a commencé par prendre les dimensions essentielles de toutes les parties de la machine; puis on a mesuré le diamètre du cylindre de deux manières différentes et plusieurs fois d'après chaque méthode, prenant toujours une moyenne entre les résultats. Dans la première méthode, on fit usage d'un compas d'épaisseur à verge, qui mesurait les diamètres très exactement, à un centième de pouce près; le cylindre était compris entre deux bras parallèles disposés pour glisser le long d'une tige divisée en pouces et dixièmes, qui étaient eux-mêmes sous-divisés en dixièmes; de sorte que le tout était divisé en centièmes de pouces. Je pris de cette manière plusieurs fois le diamètre du cylindre tout seul, c'est-à-dire sans y comprendre le fil de soie qui l'enveloppait, et je trouvai chaque fois le même résultat. Je repris ensuite le diamètre en y comprenant celui du fil de soie des deux côtés, ce qui faisait deux diamètres du fil de soie de plus que celui du cylindre, et j'ai trouvé

Diamètre du cylindre seul 2^{re},06.
Idem plus le double diamètre du fil 2,11.
 d'où: diamètre du cylindre plus 1 diamètre du fil 2,085.
 et rayon jusqu'au milieu du fil 1,042.

La deuxième méthode consiste à faire tourner la machine un certain nombre exact de fois, et à mesurer l'espace parcouru par le poids suspendu à l'extrémité du fil qui entoure le cylindre, et divisant alors cet espace par le nombre de tours, on obtint la longueur d'une circonférence du cylindre et du fil : cette longueur divisée à son tour par 3,1416, a donné le diamètre du cylindre, y compris celui du fil. Ayant répété souvent cette opération, et les résultats différant peu l'un de l'autre, la moyenne entre tous a donné, pour le diamètre du cylindre et du fil, 2,092, ce qui fait pour le rayon 1,046; d'où l'on voit que ce résultat ne diffère du précédent que de 0,004 de pouce en plus; la moyenne arithmétique entre les résultats des deux méthodes est 1,044.

2 mai 1786.

Baromètre, 30,05.

Thermomètre, 51.

12 On a mesuré les distances entre l'axe du cylindre et le centre de chaque hémisphère fixé sur le bras, et on a trouvé :

	N° 1.	N° 2.	N° 3.
Rayons ou distances	52 ^{po} ,42 . . .	52 ^{po} ,74 . . .	53 ^{po} ,34
Diamètres	104,84 . . .	105,48 . . .	106,68
Circonférence	329,36 . . .	331,38 . . .	335,14
<i>Idem</i> en pieds	27,47 . . .	27,62 . . .	27,93
Rapports des rayons	50,2 . . .	50,5 . . .	51,1

La dernière ligne contient les rapports respectifs des distances au rayon 1,044 du cylindre et du fil pris ensemble.

L'hémisphère n° 3 fut alors disposé sur le bras et mis en mouvement par un léger poids de $1 \frac{3}{4}$ once seulement ou de 1 once 12 dr. suspendu en M, à l'extrémité du cordon; on présenta à l'air, d'abord la surface convexe et ensuite la surface plane, et on observa le nombre des révolutions, et les temps correspondans, dans la présente expérience, ainsi que dans toutes les suivantes, sur des pendules à arrêt, et sur une montre particulière faite exprès pour cet objet.

Hémisphère n° 3, avec un poids en M de 28 dr. = 1 onc. 12 dr.

LA SURFACE PLANE.			LA SURFACE CONVEXE.		
TOURS.	TEMPS.	DIFFÉRENCES.	TOURS.	TEMPS.	DIFFÉRENCES.
1	0' 27"	20	3	1 59"	38
2	" 47	19	6	1 37	35
3	1 6	18	9	2 12	35
4	" 24	18	12	2 47	35
5	" 42	18	15	3 22	
6	2 0	18			
7	" 18	18	3	35"	} moyens.
8	" 36	18	1	11 $\frac{2}{3}$	
9	" 54	18	$\frac{3}{35}$	1	
10	3 12 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	2,349 ^{pi.}	1	
11	" 30 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$			
12	" 48	17			
13	4 5	17 $\frac{1}{2}$			
14	" 22 $\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{18}$ ou 1,552 ^{pi.}	18"	} moyens.			
	1				

Notez que la résistance du bras n'a pas encore été déduite de ces résistances, et qu'ensuite il restera encore à les rapporter de la circonférence du cylindre au centre de l'hémisphère.

Dans ces deux tableaux, la première colonne contient le nombre de tours faits par le bras; la deuxième les temps correspondans écoulés depuis le commencement, et la troisième indique les différences de ces temps correspondantes aux différences des nombres de tours de la première colonne.

3 mai 1786.

Baromètre, 29,63. Thermomètre, 51°.

13. On a disposé sur le bras la plaque de plomb n° 3 du même poids que le plus grand hémisphère (1); et après quelque temps employé à mettre la machine de niveau (ce qui fut toujours fait avant chaque expérience), on a suspendu, à l'extrémité du fil, différens petits poids, afin de découvrir quel poids donnerait au bras la vitesse qu'il avait la veille, lorsque l'hémisphère y était fixé. On trouva qu'il fallait environ 10 drachmes pour

(1) Voir § 5, page 85.

vaincre le frottement et la force d'inertie, et donner un faible mouvement à la machine. Avec 12 drachmes, il fallait de $11''\frac{1}{2}$ à $12''$ pour chaque révolution complète, ce qui répond, à très peu de chose près, à la vitesse de la partie convexe de l'hémisphère, mue par un poids de 12 drachmes. Mais avec un poids de $1^{\text{on}} 8^{\text{dr}} = 24^{\text{dr}}$, la révolution complète s'acheva ce jour-là en $6''$. Ainsi donc, chaque tour s'achève dans environ $12''$ avec un poids de 12 dr., et dans environ $6''$ avec un poids de 24 dr. C'est-à-dire que dans ce cas, un poids double produit à peu près le même effet dans un temps moitié moindre, d'où l'on peut inférer, qu'un poids d'environ 8 dr. ferait faire une révolution en $18''$, temps mis pour le même objet, le jour précédent, par la surface plane de l'hémisphère.

De là résulte que 16 dr. ou 1^{on} , différence entre 28 dr. et 12 dr. exprime la résistance de l'air mesurée à la circonférence du cylindre, contre la surface convexe du grand hémisphère, se mouvant avec une vitesse de $2^{\text{pi}} 394$ par seconde, et 20 dr. ou $1^{\text{on}} \frac{1}{4}$, différence entre 28 dr. et 28 dr. exprime de même la résistance relative de l'air contre la partie plane, se mouvant avec une vitesse de $1^{\text{pi}} 552$ par seconde, et chacun de ces résultats étant divisé par 51,1, donnera la résistance absolue rapportée au centre du corps.

4 mai 1786.

Baromètre, 29,47.

Thermomètre, 51.

14. On fit agir différens poids l'un après l'autre sur l'hémisphère présentant à l'air sa surface plane pour lui donner, dans cette position, la même vitesse qu'elle avait eue au 2 mai, en présentant sa partie convexe, savoir, celle d'une révolution moyenne en $11''\frac{2}{3}$; à chaque essai le mouvement devint uniforme après les 2 ou 3 premiers tours, après quoi on laissa tourner le bras 12 fois sans interruption, en ayant soin de noter le temps exact de chaque révolution. Ces temps s'accordaient en général avec le temps moyen, à une demi-seconde ou moins près. Mais on parvint même à obtenir exactement ce temps moyen lui-même, en divisant par 12 tout le temps écoulé pendant les 12 révolutions uniformes. Ces opérations, ainsi que les temps et les poids employés ce jour-là, sont détaillées ci-après.

POIDS		TEMPS	TEMPS
moteurs.		pour 12 tours.	pour 1 tour.
onc.	dr.		
2	8	158"	13"
2	9 $\frac{1}{2}$	146 $\frac{1}{2}$	12
2	10 $\frac{1}{2}$	142	11
2	11	141 $\frac{1}{2}$	11
2	12	140	11

D'où l'on voit qu'avec une vitesse de 1 tour en $11\frac{2}{3}$ ", le bras et la partie plane du corps éprouvent une résistance représentée par une force ou poids de $2^{\text{on}} 12^{\text{dr}}$. Au 2 mai, la résistance éprouvée par le bras et la partie convexe du corps était de $1^{\text{on}} 12^{\text{dr}}$, et au 3 mai la résistance sur le bras seul était de 12 dr., correspondans à des vitesses à peu près égales. Retranchant maintenant ces 12 dr. de chacune des deux autres, il reste 2^{on} pour la résistance de la partie plane, et 1^{on} environ pour celle de la partie convexe. Cette dernière étant environ moitié de la première, s'accorde dans ce cas, à peu de chose près, avec la théorie.

Divisant maintenant ces 2^{on} par 51,1, rapport des rayons du cylindre et du cercle de rotation, il en résulte $\frac{20}{511} = 0,039^{\text{on}}$, pour la résistance absolue sur la surface d'un cercle mu verticalement dans l'air, avec une vitesse de $2^{\text{pi}}, 394$ par seconde, l'aire du cercle étant de 32 pouces quarrés ou de $\frac{2}{3}$ d'un pied quarré.

14. On fit agir différens poids l'un après l'autre sur l'hémisphère présentée à l'air sa surface plane pour lui donner, dans cette position, la même vitesse qu'elle avait en présentant sa partie convexe, savoir, celle d'une révolution moyenne en $11\frac{2}{3}$ "; à chaque essai le mouvement devint plus lent, et les poids furent successivement diminués. On laissa tourner le bras 12 fois sans interruption, en ayant soin de noter

8 mai 1786. Baromètre, 29,66. Thermomètre, 56°.

15. On a essayé différens poids pour faire exécuter d'abord au grand hémisphère, présentant sa partie plane, et ensuite au bras seul, une révolution en 10 secondes; puis on a fait une expérience semblable pour faire exécuter une révolution en 8", d'abord au même corps présentant successivement ses deux surfaces, et ensuite au bras seul. Suivent les détails:

EN 10 SECONDES.					EN 8 SECONDES.			
POIDS moteurs.	PARTIE PLANE.		BRAS SEUL.		POIDS.	PARTIE plane.	PARTIE convexe.	BRAS seul.
	12 tours.	1 tour.	12 tours.	1 tour.				
onc. dr.					onc. dr.			
3 0	140"	10" $\frac{5}{6}$	"	"	4 10	8"	"	"
3 2	126	10 $\frac{1}{2}$	"	"	6 0	7	"	"
3 4	123	10 $\frac{1}{4}$	"	"	8 0	6	"	"
3 $5\frac{1}{2}$	120	10	"	"	2 2		10"	"
1 0			108"	9"	2 14		8	"
0 14			132	11	1 3			8"
0 15			120	10	1 8			6

Dans la deuxième table, la première colonne indique les poids moteurs, et les trois autres donnent le temps moyen, en secondes, employé pour une révolution de l'hémisphère présentant successivement ses deux faces, et du bras seul.

Retranchant maintenant chaque résistance du bras seul, des résistances correspondantes du bras et de l'hémisphère réunis, les restes exprimeront les résistances de l'hémisphère seul présentant successivement ses deux faces.

POUR 10 SECONDES.				POUR 8 SECONDES.			
3	$5\frac{1}{2}$	2	2	4	10	2	14
0	15	0	15	1	3	1	3
2	$6\frac{1}{4}$	1	3	3	7	1	11

où l'on voit que le premier résultat est, dans les deux cas, à peu près double du second, ce qui est d'accord avec la théorie.

9 mai 1786.

Baromètre, 29,56.

Thermomètre, 55°.

16. On a employé le grand hémisphère présentant sa face convexe. Les poids et les temps pour chaque révolution sont comme ci-après :

POIDS.		TEMPS.		POIDS.		TEMPS.		POIDS.		TEMPS.		POIDS.		TEMPS.	
onc.	dr.			onc.	dr.			onc.	dr.			onc.	dr.		
4	10	5"	$\frac{5}{6}$	6	0	4	$\frac{11}{12}$	7	12	4	$\frac{1}{6}$	12	7	3	$\frac{7}{24}$
4	9	5	$\frac{3}{4}$	6	5	4	$\frac{3}{4}$	8	1	4	$\frac{1}{12}$	12	10	3	$\frac{1}{4}$
4	11	5	$\frac{5}{6}$	7		4	$\frac{1}{2}$	11	5	3	$\frac{3}{8}$	13	0	3	$\frac{1}{6}$
5	12	5		7	8	4	$\frac{1}{4}$	12	0	3	$\frac{7}{24}$				

10 mai 1786.

Baromètre, 29,60.

Thermomètre.

17. Le grand hémisphère fut de nouveau employé par sa face convexe. Le mouvement était toujours uniforme après le premier ou le deuxième tour. Le nombre de tours employés pour chaque observation était de 15. Le temps employé mis en regard des poids correspondans dans le tableau ci-dessous, est le temps moyen de la durée d'une révolution conclue des douze derniers tours uniformes de chaque observation; c'est ce qu'on a pratiqué constamment.

POIDS.		TEMPS.		POIDS.		TEMPS.		POIDS.		TEMPS.		POIDS.		TEMPS.	
onc.	dr.			onc.	dr.			onc.	dr.			onc.	dr.		
8	5	4"	$\frac{1}{12}$	9	11	3"	$\frac{9}{12}$	13	12	3"	$\frac{1}{12}$	15	8	2"	$\frac{10}{12}$
8	8	4	$\frac{1}{24}$	10	1	3	$\frac{8}{12}$	14	0	3		16	0	2	$\frac{9}{12}$
8	12	4	$\frac{1}{12}$	10	8	3	$\frac{7}{12}$	14	5	3		16	8	2	$\frac{9}{12}$
9	0	3	$\frac{11}{12}$	10	0	3	$\frac{6}{12}$	14	10	2	$\frac{11}{12}$	17	0	2	$\frac{9}{12}$
9	6	3	$\frac{10}{12}$	13	8	3	$\frac{1}{12}$	15	0	2	$\frac{11}{12}$	17	8	2	$\frac{8}{12}$

11 mai 1786.

Baromètre, 29,64. Thermomètre, 60°.

18. Même disposition que la veille.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
18	2",67	28	2",12	38	1",79	58	1",46
19	2,58	29	2,10	40	1,75	60	1,42
20	2,50	30	2	42	1,75	64	1,33
21	2,42	31	2	44	1,67	68	1,33
22	2,42	32	2	46	1,58	72	1,29
23	2,33	33	1,92	48	1,54	76	1,25
24	2,25	34	1,92	50	1,54	80	1,21
25	2,25	35	1,83	52	1,50	84	1,17
26	2,25	36	1,83	54	1,50	88	1,17
27	2,17	37	1,83	56	1,50	92	1,13

Au poids suivant, savoir, 96 onces, le fil de soie se rompit à deux reprises; en sorte que 96 onces, ou 6 livres, donnent exactement la limite de sa force. Il n'était point tissé en ruban, c'était simplement un fil retors fait à la manière d'une corde à trois brins; son diamètre était de $\frac{1}{5}$ de pouce.

15 mai 1786.

Baromètre, 30,27. Thermomètre, 62°.

19. On s'est procuré un fil de soie plus fort, pour l'employer aux expériences suivantes. En mesurant les diamètres, etc., comme on l'avait fait au 1^{er} mai, on trouva les dimensions suivantes :

Diamètre du cylindre seul. 2,06.
Idem, plus le diamètre du fil. 2,086.
Idem, mesuré par la descente du poids. 2,088(1).
 Terme moyen des deux résultats. 2,087.

Par conséquent le rayon est, comme auparavant, de 1,044 à peu près. On a continué alors les dernières expériences, en augmentant les poids

(1) Voir page 89.

moteurs à partir du point où l'on était resté, toujours en employant la partie convexe de l'hémisphère. Suivent les résultats :

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
96	1",12	108	1",04	116	1"	124	1"
100	1,08	112	1,04	120	1	128	0,96
104	1,08	"	"	"	"	"	"

En sorte que l'on peut présumer que 120 onces sont le poids nécessaire pour faire une révolution en une seconde.

Continuation du tableau précédent.

onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.	
4	10	5",8	3	7	6",9	2	10	8",2	2	0	10",2
	8	5,9		6	7,0		9	4	1	15	6
	6	6,0		4	1		8	6	1	14½	8
	4	1		2	3		7	8	1	14	11,1
	2	2		0	5		6	9	1	13½	3
	0	3	2	15	6		5	9,1	1	13	6
3	14	4		14	7		4	3	1	12½	9
	12	6		13	8		3	5	1	12	12,2
	10	7		12	9		2	7	1	11½	6
	8	8		11	8,0		1	9	1	11	13,0

N. B. La machine faisait quinze révolutions à chaque expérience, et le temps de chaque révolution était soigneusement noté. Retranchant alors le temps employé pour les cinq premiers tours, du temps employé pour les quinze, il restait le temps de dix tours, qui, en séparant par la virgule le dernier chiffre à droite, a donné le temps d'un tour noté dans le tableau ci-dessus.

16 mai 1786.

Baromètre, 30,14. Thermomètre, 61°.

20. On a commencé à mettre en expérience la partie plane du grand hémisphère, avec l'intention de parcourir d'une manière régulière tous les intervalles de rotation, depuis 12" jusqu'à 1".

Plaque de plomb; poids, 2 onc. 5 dr.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.	
2 10	13" 1	2 12	12" 1	3 0	11" 4	3 6	10" 5
10 $\frac{1}{2}$	12,7	13	11,9	1	11,2	8	10,3
11	12,5	14	11,8	2	10,9	10	10,0
11 $\frac{1}{2}$	12,3	15	11,6	4	10,7	12	9,6

21. 17 mai 1786.

Baromètre, 30,00. Thermomètre, 60.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.	
3 14	9" 3	4 12	8" 3	5 10	7" 5	6 8	6" 7
4 0	9,1	5 14	8,2	12	7,4	12	6,6
2	9,0	5 0	8,1	14	7,2	7 0	6,5
4	8,9	2	7,9	6 0	7,1	4	6,3
6	8,7	4	7,8	2	7,0	8	6,1
8	8,6	6	7,7	4	6,9	12	6,0
10	8,5	8	7,6	6	6,8	8 0	6,0

22. 18 mai 1786.

Baromètre, 30,13. Thermomètre, 61.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.	
8 4	6" 0	12 0	4" 8	21	3" 9	44	2" 45
8	5,9	13	4,6	22	3,5	48	2,35
12	5,8	14	4,5	24	3,3	52	2,25
9 0	5,7	15	4,3	26	3,2	56	2,15
8	5,5	16	4,1	28	3,1	60	2,05
10 0	5,4	17	4,0	30	3,0	64	2,0
8	5,2	18	3,9	32	2,9	68	1,9
11 0	5,1	19	3,8	36	2,7		
8	5,0	20	3,7	40	2,55		

23. 22 mai 1786.

Baromètre, ...				Thermomètre, ...			
POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.	
72	1" 9	80	1" 8	100	1" 65	124	1" 45
74	1,85	84	1,75	108	1,6	132	1,4
76	1,85	92	1,7	116	1,5	140	1,4

Les expériences furent interrompues parce que le fil cassa sous le poids de 140 onces, au moment où l'on arrangeait la machine.

24. 23 mai 1786.

Baromètre, 30,20.

Thermomètre, 59.

Après avoir complété les expériences sur les deux faces du grand hémisphère, on en a commencé de semblables avec la plaque de plomb de même poids; les résultats sont détaillés ci-dessous.

Plaque de plomb; poids, 4 onc. 3 dr.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.		onc. dr.	
1 0	19"	1 6	7" $\frac{1}{2}$	1 8	6" $\frac{1}{2}$	1 10	5" $\frac{1}{2}$
1 2	11	1 7	7	1 9	6	1 12	5
1 4	9	"	"	"	"	"	"

25. 24 mai 1786.

Baromètre, 30,20.

Thermomètre, 61°.

POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.
onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.	
1	14	5" 0	4	0	2" 9	8	8	1" 9	22	0	1" 1						
2	0	4,7	4	8	2,75	9	"	1,8	24	"	1,1						
2	4	4,4	5	0	2,6	10	"	1,75	26	"	1,1						
2	8	4,0	5	8	2,45	11	"	1,65	28	"	1,0						
2	12	3,7	6	0	2,3	12	"	1,55	30	"	1,0						
3	0	3,5	6	8	2,2	14	"	1,45	32	"	1,0						
3	4	3,3	7	0	2,1	16	"	1,35	34	"	0,9						
3	8	3,1	7	8	2,0	18	"	1,25	"	"	"						
3	12	3,0	8	0	1,95	20	"	1,2	"	"	"						

26. Ayant ainsi obtenu une longue suite de poids moteurs et de vitesses, pour les deux faces de l'hémisphère et pour la plaque seule, on en a extrait des résultats correspondans, qui ont été réunis et mis en ordre, dans la table suivante; la première colonne contient les différentes vitesses, pied par pied, depuis 3 pieds jusqu'à 20 par seconde; les colonnes 2^e, 3^e et 4^e contiennent les poids correspondans à ces vitesses et agissant sur le cylindre d'un rayon = 1,044, tant pour les deux faces de l'hémisphère que pour la plaque; mais les différences entre ces poids n'étant pas parfaitement régulières, on les a corrigés, çà et là, par le moyen de petites fractions ajoutées ou retranchées; les poids ainsi régularisés sont consignés dans les trois colonnes suivantes. Elles doivent donc être considérées comme renfermant les véritables expressions de ces poids. Retranchant alors les poids employés pour le morceau de plomb seul, des poids correspondans employés pour les deux faces de l'hémisphère, les restes ont été placés dans les 8^e et 9^e colonnes, contenant par conséquent les poids vrais agissant sur le cylindre; et divisant enfin chaque poids trouvé pour la base plane de l'hémisphère, par le poids correspondant pour la partie convexe, les quotiens placés dans la dernière colonne du tableau expriment les rapports des résistances sur les deux faces.

VITESSE.	POIDS IRRÉGULIERS.			POIDS RÉGULIERS.			DIFFÉRENCES.		RAPPORT.
	PLANE.	CONVEXE.	PLOMB.	PLANE.	CONVEXE.	PLOMB.	PLANE.	CONVEXE.	
pieds.	onces.	onces.	onces.	onces.	onces.	onces.	onces.	onces.	
3	3,8	2,2	1,2	3,8	2,3	1,2	2,6	1,1	2,37
4	6,1	3,4	1,4	6,2	3,4	1,4	4,8	2,0	2,40
5	9,3	4,9	1,7	9,2	4,9	1,7	7,5	3,2	2,35
6	12,7	6,6	2,0	12,8	6,7	2,0	10,8	4,7	2,30
7	17	8,7	2,5	17,0	8,7	2,4	14,6	6,3	2,31
8	22	11,0	3,0	21,9	11,0	2,9	19,0	8,1	2,35
9	28	13,3	3,5	27,6	13,5	3,5	24,1	10,0	2,41
10	34	15,8	4,2	34,0	16,2	4,2	29,8	12,0	2,48
11	40	19	5,2	41,0	19,2	5,0	36,0	14,2	2,53
12	48	23	6,0	48,7	22,6	5,9	42,8	16,7	2,56
13	56	27	6,8	57,1	26,4	6,8	50,3	19,6	2,57
14	64	31	7,8	66,2	30,6	7,8	58,4	22,8	2,56
15	73	35	8,6	76,0	35,1	8,9	67,1	26,2	2,56
16	84	40	10	86,6	40,0	10,0	76,6	30,0	2,55
17	101	45	11	98,2	45,3	11,2	87,0	34,1	2,55
18	112	50	12	111	51,0	12,4	98,6	38,6	2,55
19	121	57	14	125	57,2	13,7	111,3	43,5	2,56
20	140	64	15	140	64,0	15,0	125,0	49,0	2,55

Observez que tous ces poids doivent être divisés par 51,1, pour les rapporter au centre de l'hémisphère.

27. Il résulte de la dernière colonne, que la résistance sur la base est à la résistance sur la partie convexe,

comme 2,48 : 1 ou à peu près :: $2\frac{4}{9}$: 1, au lieu du rapport 2 : 1 que donne la théorie. Des deux colonnes relatives à la face plane et à la face convexe, il résulte que les résistances qu'elles éprouvent sont en raison un peu plus élevée que celle du carré de la vitesse; mais nous ne déterminerons que plus bas de combien elle en diffère, en même temps que nous en déduirons quelques autres conséquences.

28. 26 juin 1786.

Baromètre, 29,96.

Thermomètre, ... Temps très chaud.

J'ai fait confectionner, pour les expériences qui me restaient à faire, un disque plat ou cylindre très mince, ainsi qu'une sphère entière et un cône, le tout en carton, et de même diamètre que l'hémisphère em-

ployé jusqu'ici. Mon but actuel était de découvrir si une différence dans la forme de la partie postérieure du corps influait sur les résultats, ainsi qu'on l'avait éprouvé, pour une semblable différence dans la partie antérieure, et quelle serait cette influence : c'est ainsi, par exemple, que l'hémisphère, le cylindre et le cône présentant tous trois le même cercle en avant, offraient en arrière trois figures différentes : il en est de même de la sphère entière et de l'hémisphère présentant la même convexité en avant ; leurs parties postérieures sont différentes, toutes circonstances qui donnent lieu à une grande variété de cas. L'appareil étant ajusté avec soin, l'instrument fut exactement nivelé et bien assujéti. La poulie de renvoi sur laquelle passe la corde qui soutient le poids fut fixée à une hauteur convenable, pour qu'il y eût lieu à 30 ou 40 révolutions complètes, avant que le poids moteur eût atteint la terre ; par ce moyen, on a pu obtenir avec plus d'exactitude le terme moyen d'un grand nombre de révolutions. Les nombres ci-dessous sont les moyens de 30 révolutions, et ont été trouvés en retranchant le temps écoulé pendant trois révolutions, de celui qu'ont mis trente-trois révolutions à s'achever, et divisant le reste par 30. Le disque fut employé ce jour-là, et conséquemment il y avait une surface plane en avant et en arrière. Son poids était de 5 onc. 1 dr.

C Y L I N D R E.

POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.
onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.		onc.	dr.	
2	0	15" 10	3	4	10" 57	3	12	9" 50	4	12	8" 23
2	2	14, 40	3	6	10, 32	4	0	9, 07	5	0	7, 93
3	0	11, 13	3	8	9, 90	4	4	8, 83	5	4	7, 72
3	2	10, 85	3	10	9, 73	4	8	8, 50	5	8	7, 47

29. 27 juin 1786, à 9 heures du matin.

Baromètre, 29,94. Thermomètre, 65.

POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.	POIDS.		TEMPS.
onc.	dr.		onces.		onces.		onces.		onces.		
5	12	7" 23	9	5" 60	20	3" 67	64	1" 97			
6	0	7,05	10	5,32	22	3,48	72	1,88			
6	4	6,87	11	5,02	26	3,20	80	1,80			
6	8	6,67	12	4,78	30	2,97	90	1,67			
7	0	6,47	13	4,58	34	2,77	100	1,60			
7	8	6,23	14	4,38	40	2,53	110	1,53			
8	0	6,00	16	4,10	48	2,30	120	1,50			
8	8	5,90	18	3,87	56	2,10	Rupture du fil.				

30. 28 juin 1786.

Baromètre, 30,06. Thermomètre, 65°.

Expériences sur la sphère entière: son poids, 8 onc. 14 dr.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
2	14" 5	12	3" 35	30	2" 07	80	1" 22
3	8,55	14	3,1	34	1,95	90	1,15
4	6,75	16	2,85	40	1,8	100	1,07
5	5,75	18	2,7	48	1,65	110	1,02
6	5,1	20	2,6	56	1,5	120	0,97
8	4,3	22	2,45	64	1,4	"	"
10	3,8	26	2,22	72	1,3	"	"

31. Le premier poids ou 2^{on}, était justement ce qu'il fallait pour mettre la sphère en mouvement: un poids moindre ne la faisait pas même bouger. Cela tenait sans doute en partie au poids considérable de la sphère faite de carton très épais, et en partie à la longueur du cordon de soie, longueur de 23 pieds au moins, par conséquent d'une certaine difficulté à être mise en mouvement. Ces poids additionnels donnant lieu à plus de frottement et de résistance, il était naturel de s'attendre à ce que les temps de révolution, produits par les mêmes poids moteurs que précédemment, seraient plus longs, et d'autant plus que les poids seraient moindres; mais que la différence irait toujours en diminuant, à mesure que les poids augmenteraient, jusqu'à devenir enfin insensible, si toutefois la différence, dans la forme postérieure du corps, n'apportait pas de son côté d'influence sensible: les expériences font voir que les choses se passent ainsi. En effet, la différence dans les temps de révolution entre la sphère et l'hémisphère, est très grande avec de petits poids, mais elle va peu à peu en décroissant jusqu'à s'évanouir presque entièrement, en comparaison du temps entier. D'où il résulte que les temps des révolutions sont à peu près égaux, que la face en arrière du corps soit plane ou convexe; que cela a lieu du moins dans les grandes vitesses. Celles qui ont été notées plus haut sont, pour chaque poids, les résultats moyens des 20 dernières révolutions. Il est à observer que par une méprise dans les dimensions de l'instrument, le centre de la sphère a été placé de $\frac{1}{10}$ de ponce trop

près de l'axe de rotation; de sorte que les temps devraient être un peu plus considérables qu'ils n'ont été marqués, savoir, plus considérables dans le rapport de $53\frac{1}{4}$ à $53\frac{1}{3}$ environ, ce qui toutefois ne les changera pas sensiblement.

32. 29 juin 1786.

Le même temps que hier.

Ce jour fut consacré au cône. Son poids était de $8^{\text{on}} 6^{\text{dr}}$, et sa hauteur de $6\frac{5}{8}$ pouces, c'est-à-dire un peu plus grande que son diamètre qui était le même que celui de l'hémisphère employé précédemment, de $6\frac{3}{8}$ pouces. Les expériences furent faites ce jour, le sommet étant en avant, comme il suit:

Cône; poids, 8 onces 6 drachmes.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
2	13"50	8	4"42	18	2"80	48	1"65
3	8,65	9	4,15	20	2,67	56	1,52
4	6,95	10	3,87	24	2,40	64	1,42
5	5,97	12	3,57	28	2,17	72	1,35
6	5,30	14	3,25	32	2,07	80	1,30
7	4,77	16	3,00	40	1,85	100	1,17

33. On trouva que 2^{on} était le plus petit poids capable de mettre la machine en mouvement; en comparant ces résultats avec ceux du jour précédent pour la sphère, on voit que ceux de ce jour diffèrent très peu, mais toujours en plus de ceux de la veille, et par conséquent que la résistance sur la surface convexe du cône, est presque la même, ou plutôt un peu plus considérable que celle qu'éprouve la sphère ou l'hémisphère, les diamètres étant égaux, mais la hauteur du cône étant un peu plus que double du rayon de l'hémisphère.

34. Les expériences suivantes furent faites immédiatement après, la base du cône étant en avant.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
12	4" 95	24	3" 40	48	2" 37	72	1" 93
16	4,25	30	3,05	56	2,20	80	1,85
20	3,77	40	2,60	64	2,02	100	1,65

Ces temps sont un peu plus longs que ceux obtenus pour le cylindre, mais le cône était plus lourd, et les formes postérieures étaient différentes dans les deux corps.

35. 30 juin 1786.

Baromètre, 30,02. Thermomètre, 64°, à 9 heures du matin.

On a disposé le plus petit des trois hémisphères sur la machine, de manière à ce qu'il présentât en avant sa partie plane, voulant le comparer au plus grand pour savoir si la résistance était en raison de la surface lorsque le rayon de rotation est le même. La base de cet hémisphère équivalait à $\frac{1}{8}$ de pied carré, tandis que celle du grand en valait $\frac{2}{9}$, en sorte que le rapport des surfaces était comme 9 : 16, le rayon du cercle décrit par le petit étant 52,42, celui du cercle décrit par le grand 53,34; le rapport composé de la surface et du rayon de rotation était :: $16 \times 53,34 : 9 \times 52,42$, à très peu près comme 38 : 21, ou un peu moins exactement comme 11 : 6. Notez que 6 dr. suffisaient pour mettre la machine en mouvement.

Hémisphère n° 1; poids, 2 onces 5 drachmes.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
1	21" 80	7	4" 67	20	2" 65	56	1" 57
2	10,82	8	4,35	24	2,45	64	1,45
3	7,70	10	3,90	28	2,25	72	1,40
4	6,47	12	3,50	32	2,10	80	1,32
5	5,67	14	3,25	40	1,82	"	"
6	5,15	16	3,00	48	1,67	"	"

Les résultats suivans ont été obtenus avec la plaque de plomb seule, de même poids que le petit hémisphère, savoir : 2 onces 5 drachmes.

Plaque de plomb; poids, 2 onc. 5 dr.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
1	8" 10	2 $\frac{1}{4}$	3" 55	4	2" 40	8	1" 60
1 $\frac{1}{4}$	6,00	2 $\frac{1}{2}$	3,30	4 $\frac{1}{2}$	2,25	9	1,50
1 $\frac{1}{2}$	4,95	2 $\frac{3}{4}$	3,10	5	2,10	10	1,40
1 $\frac{3}{4}$	4,35	3	2,90	6	1,90	11	1,30
2	3,80	3 $\frac{1}{2}$	2,60	7	1,70	12	1,25

36. 5 juillet 1786, à 4 heures du soir.

Baromètre, 30,32.

Thermomètre, 66.

On a préparé une plaque de plomb pesant 8^{on} 10^{dr}, ce qui fait seulement 4 dr. de plus que le poids du cône, et 4 dr. de moins que celui de la sphère entière en sorte qu'elle pesait autant que chacun de ces deux corps, à peu de chose près.

Suit le tableau des expériences.

Plaque de plomb; poids, 8 onc. 10 dr.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
1,8	9" 0	2,8	4" 2	4,0	2" 8	7,0	2" 0
1,10	7,0	2,10	4,0	4,4	2,7	8	1,8
1,12	6,4	2,13	3,8	4,8	2,65	9	1,7
1,14	5,9	3,0	3,6	4,12	2,6	10	1,6
2,0	5,3	3,3	3,4	5,0	2,5	11	1,5
2,2	4,9	3,6	3,2	5,8	2,4	12	1,4
2,4	4,6	3,9	3,0	6,0	2,2 $\frac{1}{2}$	13	1,35
2,6	4,4	3,12	2,9	6,8	2,1	14	1,3

37. La dernière partie des nombres précédens dans la série des temps, étant moindre que celle obtenue le 24 mai dernier, avec une plaque ne pesant que 4^{on} 3^{dr}, je repris ces dernières expériences afin d'obtenir plus exactement les temps correspondans à ce poids. La raison de cette différence consistait en ce qu'au 24 mai, le bras ne pouvait exécuter que 15 révolutions, n'y ayant pas de place pour une chute plus considérable du poids moteur; tandis que cette fois il pouvait tourner 35 fois; de sorte que

Seconde partie.

les temps marqués ci-dessus sont les résultats moyens des 10 dernières révolutions prises sur les 35, ce qui les rend beaucoup plus exacts.

Expériences avec le poids de 4^{on} 3^{dr}.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
2,0	4"6	3,8	3,0	7	1"9	12	1'3
2,4	4,2	4,0	2,7	8	1,75	13	1,25
2,8	3,85	4,8	2,5	9	1,6	14	1,2
2,12	3,5	5	2,3	10	1,5	"	"
3,0	3,3	6	2,1	11	1,4	"	"

6 juillet 1786.

Suite des expériences avec le poids de 4^{on} 3^{dr}.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
1,4	10"8	1,6	8"4	1,8	7"0	1,12	5"8
1,5	9,8	1,7	7,6	1,10	6,4	1,14	5,3

Les suivantes furent faites sur le cône, la base étant en avant, pour compléter la suite des expériences du n° 34.

Cône, 8 onc. 6 dr.

POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.	POIDS.	TEMPS.
onces.		onces.		onces.		onces.	
4,10	9"6	5,8	8"2	9"	5"95	100	1"6
4,12	9,3	6,0	7,7	10	5,55	110	1,55
4,14	9,1	7	6,95	12	5,05	120	1,5
5,0	8,9	8	6,3	"	"	"	"

Lorsque le poids de 120^{on} approcha de terre, le fil se rompit.

39. Nous étant ainsi procuré une suite assez complète d'expériences sur des corps de dimensions et de formes variées, nous allons maintenant réunir, sous un même point de vue, les poids pour chaque espèce de figure, et pour toutes les vitesses, depuis 3 jusqu'à 20 pieds par seconde.

Et d'abord nous donnerons les résultats irréguliers, tels que les expériences les ont donnés.

Poids et vitesses donnés par l'expérience.										
VITESSE par seconde.	CONE,		SPHÈRE entière, 8onc 1/4dr	CYLINDRE, 5onc 1dr	GRAND HÉMISPHERE,		PETIT hémisph. 2onc 5dr	PLOMB, I 8onc 1odr	PLOMB, II 4onc 3dr	PLOMB, III 2onc 5dr
	8 onc.	6 dr.			4onc	3dr				
	Sommet.	Base.			Convexité.	Base.				
3	2,9	4,7	2,8	3,5	2,2	3,8	2,4	1,4	1,3	0,9
4	4,0	6,9	3,9	6,0	3,4	6,1	3,6	1,6	1,5	1,1
5	5,4	9,9	5,2	9,0	4,9	9,2	5,1	1,9	1,8	1,4
6	7,3	13,7	7,1	12,5	6,6	12,8	7,1	2,2	2,0	1,7
7	9,5	18,0	9,2	16,8	8,7	17,0	9,5	2,6	2,4	1,9
8	12,5	22,9	11,3	21,8	11,0	22,1	12,0	3,1	2,8	2,3
9	15,1	29,0	14,0	27,6	13,3	28,2	15,1	3,5	3,3	2,7
10	18,0	35,6	16,7	33,5	15,8	34,0	18,3	4,0	3,8	3,1
11	21,8	41,7	20,7	39,7	19,0	40,0	22,0	4,4	4,4	3,6
12	25,2	49,9	24,0	47,0	23,0	48,0	26,4	5,8	5,1	4,1
13	28,8	58,2	28,0	54,0	27,0	56,0	30,7	6,2	5,7	4,7
14	34,5	65,8	32,0	62,0	31,0	64,0	34,9	7,0	6,5	5,5
15	39,3	78,0	37,2	72,0	35,0	73,0	38,6	7,7	7,2	6,2
16	44,0	90,0	42,7	84,0	40,0	84,0	43,7	8,5	8,0	6,8
17	48,6	101,0	48,5	95,0	45,0	101,0	50,4	9,5	8,6	7,6
18	54,2	110,0	53,3	109,0	50,0	112,0	57,3	10,5	9,4	8,5
19	60,0	126,0	58,4	125,0	57,0	121,0	62,7	11,3	10,3	9,3
20	66,3	"	64,0	"	64,0	140,0	72,0	12,0	11,0	10,0

40. Comme il existe de légères irrégularités parmi quelques-uns de ces nombres, ainsi qu'on le voit par leurs différences; en corrigeant celles-ci de manière à les rendre régulières, et redressant par là le peu d'irrégularités qui existent dans les poids moteurs, on a formé la table suivante, plus exacte que la précédente.

Table plus exacte des poids et vitesses.

VITESSE par seconde.	CONE, 8onc. 6dr.		SPHÈRE entière,	CYLINDRE, 5onc 1dr	GRAND HÉMI SPHÈRE, 4onc 3dr		PETIT hémisph.	PLOMB, I	PLOMB, II	PLOMB, III
	Sommet.	Base.	8onc 14dr		Convexité.	Base.	2onc 5dr	8onc 10dr	4onc 3dr	2onc 5dr
3	2,9	4,7	2,8	3,5	2,2	3,8	2,4	1,4	1,2	1,0
4	4,1	7,2	4,0	6,0	3,4	6,3	3,6	1,6	1,4	1,2
5	5,5	10,2	5,4	9,0	4,9	9,3	5,1	1,9	1,7	1,5
6	7,2	13,7	7,0	12,5	6,7	12,8	7,0	2,2	2,0	1,8
7	9,2	17,8	9,0	16,6	8,7	16,9	9,2	2,6	2,4	2,1
8	11,6	22,5	11,3	21,3	11,0	21,6	11,7	3,0	2,8	2,5
9	14,3	27,9	14,0	26,7	13,5	27,0	14,6	3,5	3,3	2,9
10	17,3	34,0	17,0	32,8	16,2	33,1	17,8	4,0	3,8	3,4
11	20,7	41,0	20,4	39,6	19,2	40,0	21,4	4,6	4,3	3,9
12	24,4	48,6	24,1	47,2	22,6	47,6	25,4	5,2	4,9	4,4
13	28,4	57,0	28,1	55,6	26,4	56,0	29,7	5,9	5,5	5,0
14	32,8	66,2	32,4	64,8	30,6	65,2	34,4	6,6	6,2	5,6
15	37,5	76,2	37,1	74,8	35,1	75,2	39,4	7,4	6,9	6,2
16	42,6	87,2	42,1	85,8	40,0	86,2	44,8	8,2	7,6	6,9
17	48,0	99,2	47,5	97,8	45,3	98,2	50,5	9,1	8,4	7,6
18	53,8	112,3	53,3	110,9	51,0	111,3	56,6	10,0	9,2	8,4
19	60,0	126,5	59,5	125,1	57,2	125,5	63,1	11,0	10,1	9,2
20	66,6	141,8	66,0	140,4	63,8	140,8	70,1	12,0	11,0	10,0

41. Retranchant maintenant les nombres compris dans les trois dernières colonnes relatives aux plaques de plomb, des nombres correspondans pris dans les colonnes des corps de même poids, les restes donnent les séries des résistances respectives de chaque corps; elles sont consignées dans la table suivante. Les nombres retranchés de ceux de la colonne relative au cylindre, qui pesait 5^{on} 1^{dr}, ont été déduits par approximation de la pénultième colonne de la table précédente, c'est-à-dire de celle du plomb dont le poids s'approche le plus de celui du cylindre.

Table des résistances moyennes régulières sur des corps de figures variées.

VITESSE par seconde.	PETIT hémisph.	CONE.		SPHÈRE entière.	CYLINDRE.	GRAND HÉMISPHERE.		RAPPORTS de la convexité à la base.
	Base.	Sommet.	Base.			Convexité.	Base.	
pieds.								
3	1,4	1,5	3,3	1,4	2,4	1,1	2,6	2,36
4	2,4	2,5	5,6	2,4	4,6	2,1	4,9	2,33
5	3,6	3,6	8,3	3,5	7,3	3,2	7,6	2,38
6	5,2	5,0	11,5	4,8	10,5	4,7	10,8	2,30
7	7,1	6,6	15,2	6,4	14,2	6,3	14,5	2,30
8	9,2	8,6	19,5	8,3	18,4	8,2	18,8	2,30
9	11,7	10,8	24,4	10,5	23,3	10,2	23,7	2,32
10	14,4	13,3	30,0	13,0	28,9	12,4	29,3	2,36
11	17,5	16,1	36,4	15,8	35,2	14,9	35,7	2,40
12	21,0	19,2	43,4	18,9	42,2	17,7	42,7	2,41
13	24,7	22,5	51,1	22,2	50,0	20,9	50,5	2,42
14	28,8	26,2	59,6	25,8	58,5	24,4	59,0	2,42
15	33,2	30,1	68,8	29,7	67,8	28,2	68,3	2,42
16	37,9	34,4	79,0	33,9	78,0	32,4	78,6	2,43
17	42,9	38,9	90,1	38,4	89,2	36,9	89,8	2,43
18	48,2	43,8	102,3	43,3	101,5	41,8	102,1	2,44
19	53,9	49,0	115,5	48,5	114,8	47,1	115,4	2,45
20	60,1	54,6	129,8	54,0	129,2	52,8	129,8	2,46

Dans ce tableau, indépendamment des colonnes qui donnent les résistances sur chaque figure, exprimées en onces et dixièmes d'once (avoir du poids), on a ajouté une dernière colonne où se trouvent les rapports entre les nombres correspondans des deux colonnes immédiatement précédentes, lesquelles comprennent les résistances sur la convexité et sur la partie plane du grand hémisphère; ces rapports ont été obtenus en divisant constamment le plus grand nombre par le plus petit; on voit qu'ils vont toujours en croissant, mais faiblement, et en même temps que les vitesses; le terme moyen en est 2,4 au lieu de 2 seulement que donne la théorie de la résistance sur des figures de ce genre. Mais, comme la différence dont il s'agit peut provenir en partie de la diversité des formes postérieures des corps soumis à l'expérience, il est plus exact de comparer, pour cet objet, la sphère entière avec le grand hémisphère, la face plane étant en avant, ou le cylindre avec ce même hémisphère, la face convexe étant en avant; car dans l'un et l'autre cas, les parties postérieures ont la même

forme, et alors on trouvera pour rapport moyen, environ 2,3. Après tout, il est à observer que les nombres compris dans la table précédente donnent, non pas la vraie mesure des résistances, mais seulement les poids agissant à la circonférence du cylindre ou axe, tandis que la véritable résistance de l'air agit sur le corps, à l'extrémité du bras. Ainsi donc, pour obtenir les résistances vraies, il faut encore diviser tous ces nombres par les rapports des rayons correspondans ou des distances auxquelles les poids et la résistance de l'air agissent, savoir, par 50,2 pour le petit hémisphère, et par 51,1 pour toutes les autres figures, ainsi que ces rapports ont été déterminés au 2 mai. Cela fait, la vraie mesure des résistances se trouvera être ainsi qu'elle est consignée dans la table ci-dessus, pour toutes les vitesses, depuis 3 jusqu'à 20 pieds par seconde.

Tables des résistances vraies sur chaque figure exprimées en onces.

VITESSE par seconde.	CONE.		SPHÈRE entière.	CYLINDRE.	HÉMISPÈRE.		PETIT hémisph.	EXPOSANS de la vitesse.
	Sommet.	Base.			Base.	Convexité.	Base.	
3	0,028	0,064	0,027	0,050	0,051	0,020	0,028	
4	0,048	0,109	0,047	0,090	0,096	0,039	0,048	
5	0,071	0,162	0,068	0,143	0,148	0,063	0,072	
6	0,098	0,225	0,094	0,205	0,211	0,092	0,103	
7	0,129	0,298	0,125	0,278	0,284	0,123	0,141	
8	0,168	0,382	0,162	0,360	0,368	0,160	0,184	
9	0,211	0,478	0,205	0,456	0,464	0,199	0,233	
10	0,260	0,587	0,255	0,565	0,573	0,242	0,287	
11	0,315	0,712	0,310	0,688	0,698	0,297	0,349	2,049
12	0,376	0,850	0,370	0,826	0,836	0,347	0,418	2,042
13	0,440	1,000	0,435	0,979	0,988	0,409	0,492	2,036
14	0,512	1,166	0,505	1,145	1,154	0,478	0,573	2,031
15	0,589	1,346	0,581	1,327	1,336	0,552	0,661	2,031
16	0,673	1,546	0,663	1,526	1,538	0,634	0,754	2,033
17	0,762	1,763	0,752	1,745	1,757	0,722	0,853	2,038
18	0,858	2,002	0,848	1,986	1,998	0,818	0,959	2,044
19	0,959	2,260	0,949	2,246	2,258	0,922	1,073	2,047
20	1,069	2,540	1,057	2,528	2,542	1,033	1,196	2,051
Nombres proport.	126	291	124	285	288	119	140	2,040

Les nombres placés au bas des colonnes, sont les rapports moyens

résultans de la comparaison de toutes les résistances correspondantes à 10 pieds de vitesse. La hauteur moyenne du baromètre, pendant toutes les expériences, était de 30,1, et celle du thermomètre de 60°; circonstances dans lesquelles le rapport du poids de l'eau à celui de l'air était :: 840 : 1, ou autrement le pied cube d'air pesait $1\frac{1}{2}$ once (avoir du poids).

Nous répéterons encore que le diamètre du petit hémisphère était de $4\frac{3}{4}$ pouces, et par suite l'aire de la base ou du grand cercle de $17\frac{3}{4}$ pouces carré ou environ de $\frac{1}{8}$ de pied carré. Mais le diamètre commun de toutes les autres figures était de 32 pouces carrés, ou $\frac{2}{9}$ de pied carré. De même la hauteur du cône était de $6\frac{5}{8}$ pouces, de sorte que son côté fait, avec son axe, un angle de 25°,42.

43. On peut tirer de la précédente table des résistances, plusieurs conséquences pratiques. Telles sont :

(1). Que la résistance est à peu près en raison de la surface. Elle croît un peu au-dessus de ce rapport lorsqu'elle agit sur des surfaces plus étendues. Ainsi, par exemple, en comparant respectivement ensemble les nombres compris dans les sixième et huitième colonnes relatives aux bases des deux hémisphères, bases qui sont entre elles :: $17\frac{3}{4}$: 32, ou à peu près :: 5 : 9; on voit que les nombres qui expriment les résistances sont à peu près entre eux :: 1 : 2 ou :: 5 : 10, jusqu'à la vitesse de 12 pieds, après quoi les résistances sur la plus grande surface montent graduellement au-dessus de ce rapport, et les résistances moyennes sont :: 140 : 288 ou :: $5 : 10\frac{2}{7}$ dans les limites de ces expériences. On obtient à peu près le même rapport en comparant les nombres contenus dans d'autres colonnes relatives à des surfaces semblables. Maintenant le rapport des surfaces étant :: 5 : 9, et celui des résistances :: $5 : 10\frac{2}{7}$, on voit que ce dernier surpasse le premier dans le rapport de 9 : $10\frac{2}{7}$ ou de 1 : $1\frac{1}{7}$ ou de 7 : 8. D'où l'on peut conclure un moyen d'obtenir la résistance sur une surface quelconque, connaissant celle qui a lieu sur une surface semblable plus petite, la vitesse étant la même; pour cela multipliez la résistance donnée par le quotient de la grande surface divisée par la petite; multipliez le résultat par le rapport $\frac{8}{7}$, et vous aurez, à peu de chose près, la résistance sur la grande surface. On agira par de semblables principes pour obtenir la résistance sur un plus petit corps, connaissant celle sur un corps plus grand, mais de même figure, et animée de la même vitesse. Nous

examinerons plus bas si cette règle a encore lieu pour de très grandes vitesses.

(2) La résistance sur la même surface, avec des vitesses différentes est, dans ces mouvemens peu rapides, environ comme le quarré de la vitesse; mais elle monte bientôt au-dessus de ce rapport, à mesure que la vitesse augmente. C'est ce qu'il est facile de vérifier par tâtonnement sur chaque colonne. L'exposant des puissances de la vitesse a été calculé d'après les résistances contenues dans la quatrième, relative à la sphère entière, en comparant la résistance pour la vitesse 10 avec chacune des suivantes; et l'on voit qu'après les 3 ou 4 premiers résultats, les nombres vont en augmentant peu à peu, et continueraient vraisemblablement de le faire jusqu'à une très grande étendue. Le terme moyen des exposans obtenus ci-dessous est 2,040; d'où il résulte que, dans ces mouvemens peu considérables, la résistance sur un même corps est environ comme la puissance 2,04 de la vitesse, à peu de chose près.

Voici un moyen facile de déterminer ces différentes puissances de la vitesses : faites un petit tableau comme ci-contre, dont la première colonne renferme les vitesses à partir de 10 pieds; mettez dans la deuxième les résistances correspondantes, tirées de l'une quelconque des colonnes du tableau précédent, par exemple, de celle relative à la sphère entière. Posez alors, pour remplir la troisième colonne, $r = 255 =$ la première résistance, $r' =$ une autre résistance quelconque, par exemple, la seconde 310; et enfin $x =$ l'exposant cherché de la puissance de la vi-

VITESSE.	RÉSISTANCE.	EXPOSANT
10	255	
11	310	2,049
12	370	2,042
13	435	2,036
14	505	2,031
15	581	2,031
16	663	2,033
17	752	2,038
18	848	2,044
19	949	2,047
20	1057	2,051

tesse qui doit être dans un certain rapport avec les résistances, c'est-à-dire que l'on aura $10^x : 11^x :: r : r'$; divisant les deux premiers termes par 10^x , et les deux autres par r , la proportion devient $1 : (1,1)^x :: 1 : \frac{r'}{r}$, d'où $1,1^x = \frac{r'}{r}$; prenant les logarithmes, on a $x \log 1,1 = \log r' - \log r$, et par suite $x = \frac{\log r' - \log r}{\log 1,1} = 2,049$, en substituant pour r et r' leurs valeurs. De même en remplaçant successivement dans le dénominateur de l'expression générale x le nombre 1,1 par 1,2; 1,3; 1,4, etc., jusqu'à 2,0, et en mettant en même temps dans le numérateur pour r' ses différentes valeurs 370, 435,

505, etc., celle de r restant constamment = 255, on obtiendrait successivement les différens nombres de la troisième colonne.

(3). A diamètres égaux, les extrémités arrondies ou anguleuses des corps éprouvent moins de résistance que les extrémités planes; ainsi les faces planes du cylindre, de l'hémisphère et du cône, supportent plus de résistances que les faces convexes et pointues de ces mêmes corps. Il ne faudrait pas cependant en conclure qu'une surface éprouve d'autant moins de résistance qu'elle est moins obtuse; car la surface convexe de l'hémisphère éprouve moins de résistance que la surface pointue du cône.

(4). Lorsque les parties postérieures des corps sont de formes différentes, les résistances varient quoique les parties antérieures soient parfaitement semblables et égales; ce qui tient sans doute à la différence de pression de l'air sur les parties postérieures. C'est ainsi que la résistance sur la partie antérieure du cylindre, est moindre que celle qu'éprouvent les bases absolument égales du cône ou de l'hémisphère, parce que l'arrière base du cylindre éprouve plus de pression, ou est poussée en avant par l'air qui reprend sa place avec plus de force que les parties postérieures des deux autres figures en question; par la même raison la base de l'hémisphère supporte moins de résistance que celle du cône, et la partie convexe de cet hémisphère moins que la sphère entière.

(5). La résistance sur la base de l'hémisphère est à celle qu'éprouve sa convexité, ou à celle qu'éprouve la sphère entière, à peu près comme $2\frac{2}{5} : 1$, au lieu du rapport $2 : 1$ donné par la théorie. Et la résistance donnée par l'expérience, dans chacun de ces deux cas, est d'environ $\frac{1}{4}$ plus forte que celle qui est déterminée par la théorie.

(6). La résistance sur la base du cône est à celle qu'éprouve le sommet environ :: $2,3 : 1$; ce qui est à peu près le même rapport qui existe entre le rayon et le sinus de l'angle d'inclinaison du côté du cône sur son axe. En sorte que dans cet exemple la résistance est proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence, la surface étant la même.

(7). On est maintenant en état de déterminer la hauteur d'une colonne d'air dont la pression est égale à la résistance qu'éprouve un corps qui se meut dans ce fluide avec une vitesse quelconque. En effet,

Soit a = l'aire de la section du corps semblable à l'un de ceux compris dans la table des résistances et faite perpendiculairement à la direction du mouvement.

r = la résistance correspondante à une des vitesses de la table; et

x = la hauteur cherchée, d'une colonne d'air dont la base est a ,
 et dont la pression est r ;
 on a ax = la solidité en pieds cubes de la colonne, et $\frac{1}{5} ax = \frac{6}{5} ax$ =
 sa pesanteur en onces.

On tire de là $\frac{6}{5} ax = r$ et $x = \frac{5}{6} \times \frac{r}{a}$ = la hauteur cherchée en pieds,
 c'est-à-dire les $\frac{5}{6}$ du rapport entre la résistance d'un corps quelconque et
 la section transverse de ce corps. Cette quantité est constante dans tous
 les corps semblables, et de dimensions différentes, puisque la résistance r
 est presque proportionnée à la surface a , ainsi qu'on l'a trouvé (art. 1),
 si $a = \frac{8}{9}$ de pied carré, comme cela a lieu pour tous les corps de la table
 précédente, à l'exception du petit hémisphère; alors $x = \frac{5}{6} \times \frac{r}{a}$ devient
 $x = \frac{15}{4} r$.

Prenant, par exemple, la partie convexe du grand hémisphère, dont la
 résistance pour une vitesse de 16^{pi} par seconde est de 0,634 onces; on a
 alors $r = 0,634$ et $x = \frac{15}{4} r = 2,3775$ pieds. Si nous comparons cette
 hauteur avec la hauteur de chute relative à la même vitesse, on aura
 $32^2 : 16^2 :: 16 : 4$ = la hauteur de la chute répondant à la vitesse 16,
 d'où l'on voit qu'elle est à peu près le double de celle qui correspond à la
 pression. Et comme la hauteur x est proportionnelle au carré de la vitesse, et
 que celui-ci est proportionnel à la hauteur de chute, il en résulte que pour de
 petites vitesses la résistance sur une surface sphérique quelconque, est égale à
 la pression d'une colonne d'air sur son grand cercle, et dont la hauteur serait
 les $\frac{12}{32}$ ou 0,594 de la hauteur de chute due à cette vitesse (1).

Mais si l'on prend le cylindre dont la résistance $r = 1,526$; alors
 $x = \frac{15}{4} r = 5,7225$, qui excède la hauteur 4 relative à la vitesse dans le
 rapport de 23 à 16 environ. Et la différence serait encore plus sensible
 si le corps était plus grand, et si la vitesse était plus considérable.

(8). Si l'on voulait trouver avec quelle vitesse doit se mouvoir une sur-
 face plane pour supporter une résistance précisément égale à la pression
 de l'atmosphère, on s'y prendrait ainsi.

La résistance sur le cercle dont l'aire est de $\frac{8}{9}$ de pied carré, est
 0,051 onces pour une vitesse de 3 pieds par seconde, cela fait $\frac{1}{3} \times 0,051$,

(1) On a $\frac{x}{x'} = \frac{v^2}{v'^2} = \frac{h}{h'}$, où h et h' désignent des hauteurs de chute correspondant
 respectivement aux vitesses v et v' ; on en tire $\frac{x}{h} = \frac{x'}{h'}$, or $\frac{x}{h} = 0,594$; donc $x' = 0,594 h'$.

ou 0,0056 onces seulement pour une vitesse de 1 pied. Mais la pression de toute l'atmosphère sur le cercle $= 2 \frac{1}{2} \times 13600 \times \frac{5}{9} = 7555 \frac{5}{9}$ onces (1). Par conséquent on a $\sqrt{0,0056} : \sqrt{7556} :: 1$ est à la vitesse cherchée $= 1162$ à peu près; ce qui est aussi à peu près la vitesse avec laquelle l'air se précipite dans le vide.

(9). On peut conclure de ce qui précède, combien est grande la résistance qu'éprouvent les projectiles des armes à feu; car on voit, d'après la table, qu'une sphère d'un diamètre de $6 \frac{3}{8}$ pouces (ce qui correspond au volume d'un boulet de fer de 36 liv. pesant), se mouvant avec une vitesse de 16 pieds par seconde, éprouve une résistance égale à la pression d'un poids de $\frac{2}{3}$ d'once. Calculant donc, seulement en raison du carré de la vitesse, la résistance qu'éprouverait au moins un semblable boulet, se mouvant avec une vitesse de 1600 pieds, elle serait égale à la pression d'un poids de 417 liv., et cela sans tenir compte de la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure du boulet, pression qui équivaut à 487 liv., attendu que la partie postérieure du boulet n'éprouverait aucune pression dans le cas d'une vitesse de 1600 pieds par seconde; de sorte que pour cette vitesse, la résistance de l'air serait de plus de 900 liv.

(10). Je viens de dire qu'il n'existe plus de pression atmosphérique sur la partie postérieure d'un boulet, se mouvant avec une vitesse de 1600 pieds par seconde; en effet, cela doit arriver toutes les fois que le boulet se meut plus vite que les particules d'air qui le suivent, en se précipitant, pour occuper la place laissée vide par le boulet, ou autrement, lorsque le mobile aura une vitesse aussi ou plus considérable que la vitesse avec laquelle l'air entre dans le vide. Examinons donc quelle est cette vitesse. La vitesse avec laquelle un fluide quelconque se répand, dépend de sa hauteur au-dessus de l'orifice, et est égale à la vitesse acquise par un corps pesant, tombant librement de toute cette hauteur; mais si l'on suppose la hauteur du baromètre $= 30$ pouces, ou $2 \frac{1}{2}$ pieds, la hauteur d'une atmosphère uniformément dense, ayant partout la même densité qu'à la surface de la terre, sera de $2 \frac{1}{2} \times 13,6 \times 833 \frac{1}{3}$, ou 28,333 pieds (2); par conséquent $\sqrt{16} : \sqrt{28333} :: 32 : 8 \sqrt{28333} = 1346$ pieds, ce qui est la

(1) 2 pieds $\frac{1}{2} = 30$ pouces = hauteur barométrique; 13600 = poids en onces d'un pied cube de mercure.

(2) Nous avons vu ci-dessus que la pression atmosphérique sur 1 pied carré, équivaut au produit $2 \frac{1}{2} \times 13600$ onces; à la surface de la terre, le pied cube d'air pèse $\frac{5}{9}$ d'once; donc la hauteur d'une atmosphère uniforme, exerçant la même pression, sera

$$2 \frac{1}{2} \cdot 13600 \cdot \frac{5}{9} = 2 \frac{1}{2} \cdot 13,6 \cdot 833 \frac{1}{3}.$$

vitesse cherchée. Donc, avec une vitesse de 1600 pieds par seconde, ou même avec une vitesse quelconque au-dessus de 1346 pieds, le boulet doit laisser continuellement un vide derrière lui, et par conséquent supporter toute la pression de l'atmosphère, en même temps que la résistance provenant de l'inertie des particules d'air frappées par le boulet.

(11). En récapitulant, on trouve que la résistance de l'air, déterminée par les expériences précédentes, diffère considérablement, tant dans son intensité sur toute espèce de figures, que dans ses rapports d'action sur les surfaces obliques, des mêmes résistances et actions calculées d'après les théories les plus imposantes et les plus plausibles admises par les physiciens; d'où l'on peut inférer, que toutes les propositions purement spéculatives sur la résistance de l'air, exposées jusqu'à présent, sont tout-à-fait fausses, et que ce n'est qu'à l'aide d'expériences faites avec soin et habileté, qu'on peut fonder une espérance raisonnable d'établir enfin une théorie vraie et utile sur l'action de forces liées d'une manière si intime à un grand nombre de circonstances importantes de la vie humaine.

Procédons maintenant à la relation ultérieure de nos expériences avec la machine de rotation sur d'autres corps et dans d'autres positions.

EXPÉRIENCES FAITES EN 1787 ET 1788.

31 juillet 1787.

44. En comparant la résistance sur la partie convexe du cône, telle que l'expérience la donne, avec celle fournie par la théorie, on voit que, d'après l'une, elle est presque égale à celle qu'éprouve la sphère, tandis que, d'après l'autre, elle n'en devrait être que les $\frac{2}{5}$ environ. Cette différence m'a engagé à renouveler les expériences sur ces deux corps, et j'ai trouvé, à peu de chose près, les mêmes résultats que précédemment. Les nombres ci-dessous sont les moyens des temps d'une révolution obtenus par un poids de 32 onces, savoir:

Résultats de cette année.

Pour le cône..... 2" 10.

Pour la sphère..... 2,02.

Résultats de l'année passée.

2" 07.

2,02, à peu près les mêmes.

En sorte qu'il ne paraît pas facile de rendre raison d'une si grande différence entre la théorie et l'expérience, dans le cas où le cône s'avance par son sommet.

5 août 1787.

Beau temps, ciel clair, temps chaud.

45. Des expériences étant faites sur les corps suivans, on a trouvé, comme ci-dessous, les moyens des temps d'une révolution.

GRANDE sphère.	CONE.		PETIT HÉMISPHERE.		PLOMB de 2onc. 5dr.
	Sommet.	Base.	Base.	Convexité.	
2"	2" 05	2" 9	2" 3	1" 6	1" 6

Le poids moteur, pour chacun de ces trois corps, était de 32 onces, et de 8 onces seulement pour la plaque de plomb, la même qu'au 30 juin 1786.

EXPÉRIENCES DE 1788 AVEC LA MACHINE DE ROTATION.

23 juillet 1788.

46. On a disposé la machine pour de nouvelles expériences à faire, sur des formes de corps différentes des précédentes; j'ai fait préparer un mince plateau en cuivre, de forme rectangulaire, pour l'adapter au bras de la machine; son poids était de 11^{on} 3^{dr} ou 11 $\frac{1}{21}$ ^{on}, et ses dimensions de 8 pouces sur 4, en sorte que sa surface était de 32 pouces carrés comme celle des bases du cône et du grand hémisphère précédemment employés. Elle était préparée pour pouvoir être adaptée à l'extrémité du bras dans les deux directions, savoir, suivant sa longueur et suivant sa largeur, afin d'examiner l'effet de la même surface dans les deux positions. On imagina également un moyen d'incliner la surface à volonté sur la direction du mouvement, pour pouvoir obtenir les résistances sous tous les angles d'inclinaison. Lorsque sa longueur se trouvait dans la direction du bras, la distance de son centre de figure à l'axe de rotation était de 53 $\frac{3}{4}$ pouces; on conservait la même distance lorsque le plateau était ajusté suivant sa longueur.

24 juillet 1788.

Baromètre, 30,0. Thermomètre, 70 $\frac{1}{2}$.

47. Les expériences ont été faites ce jour avec le rectangle ayant sa longueur dans la direction du bras, son centre étant à $53 \frac{3}{4}$ pouces de l'axe de rotation. Le plan fut incliné suivant différens angles, ainsi qu'il est détaillé ci-dessous, et le poids était de 32 onces ou 2 liv., pour chaque expérience.

Table des temps de révolution, plateau suivant sa longueur.

0°, ou position horizontale.	5°.	10°.	20°.	30°.	40°.	45°.	50°.	60°.	70°.	80°.	90°, ou position verticale.
1" 00	1" 17	1" 34	1" 67	1" 98	2" 27	2" 40	2" 54	2" 78	2" 94	3" 00	3" 02

La première ligne de cette table comprend les angles sous lesquels le plan était incliné à l'horizon, ou à la direction du mouvement; angles qui diffèrent tantôt de 5°, tantôt de 10° entre eux. La première position étant donnée par l'angle 0°, le plan était horizontal, et présentait le tranchant à l'air; tandis que dans la dernière position donnée par l'angle de 90°, le plan étant vertical, présentait directement sa surface à l'impulsion de l'air. La seconde ligne comprend les temps d'une révolution exprimée en secondes et centièmes de seconde, chaque nombre étant, suivant notre usage, le terme moyen de plusieurs révolutions consécutives.

Nota. L'aire du rectangle est de 32 pouces carrés ou de $\frac{2}{9}$ de pied carré, et égale celle de la base du grand hémisphère.

Le rayon de révolution = $53 \frac{3}{4}$ pouces.

La circonférence décrite par ce centre en une révolution = 337,7 pouces ou 28,14 pieds

Le rapport du rayon du cylindre au rayon de révolution = 1 : 51,51, en prenant pour le rayon du cylindre, y compris celui du fil, 1,044 pouces.

25 juillet 1788.

Baromètre, 60,10. Thermomètre, 66°.

48. On a employé de nouveau la même plaque de cuivre, inclinée comme ci-dessus, sous différens angles, mais fixée dans un autre sens, c'est-à-dire de manière à avoir sa largeur ou petite dimension dans la direction du bras; son centre étant toujours à la distance de $53\frac{3}{4}$ pouces du centre du mouvement; le tout pour examiner si ce changement de position ferait varier les résultats; le poids était, comme ci-dessus, constamment de 32 onces.

Plateau suivant sa largeur.

0°, ou position horizontale.	5°.	10°.	20°.	30°.	40°.	45°.	50°.	60°.	70°.	80°.	90°, ou position verticale.
1" 00	1" 17	1" 35	1" 69	2" 00	2" 30		2" 57	2" 80	2" 93	3" 00	3" 03

Dans ce tableau, comme dans le précédent, la première ligne contient les différentes inclinaisons de la surface sur la direction du mouvement, et la seconde les temps moyens de révolution. On n'a point fait ce jour l'expérience pour l'angle de 45°, mais on l'avait faite la veille de deux manières différentes, savoir, pour la surface inclinée de 45° d'avant en arrière (\), et pour la même inclinaison, d'arrière en avant (/); le résultat avait été le même dans les deux cas, d'où l'on peut conclure que la résistance est la même pour chaque inclinaison, soit qu'elle ait lieu en avant, soit qu'elle ait lieu en arrière, comme on pouvait d'ailleurs s'y attendre.

En comparant les résultats du jour avec ceux de la veille, on ne voit presque point de différence; mais si l'on veut en tenir compte, ce sont plutôt ceux de ce jour qui surpassent les autres; cependant la différence est si légère et si incertaine, que l'on peut regarder les temps comme parfaitement égaux.

49. Après les expériences précédentes, on en recommença de nouvelles avec un morceau de plomb fixé à l'extrémité du bras et dont le poids égalait celui du rectangle de cuivre, présentant une très faible résistance;

il donne, à peu de chose près, les poids à déduire des précédens, pour tenir compte de la résistance du bras et du frottement de la machine, savoir:

Poids moteurs en onces.	8	10	12	16	20	24	28	32
Temps de chaque révolution.	3" 33	2" 50	2" 00	1" 54	1" 35	1" 20	1" 09	1" 00

De ces résultats on peut déduire les suivans par interpolation, savoir:

Inclinais.	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Poids.... onc.	32	24,8	19,5	15,5	12,7	10,9	9,9	9,3	8,9	8,7	8,6
Temps....	1" 00	1" 17	1" 35	1" 68	1" 99	2" 28	2" 56	2" 79	2" 94	3" 00	3" 02

50. D'où l'on peut déduire cette table générale :

INCLINAISON	TEMPS	POIDS MOTEURS		DIFFÉRENCE	Idem,	VITESSE
du plateau.	pour une révolution.	avec plateau.	sans plateau.	ou résistance.	réduite au bras.	par seconde.
0°	1" 00	32 onc.	32 onc.	0,0	0,000	28 ^{pi} 1
5	1,17	32	24,8	7,2	0,140	24,1
10	1,35	32	19,5	12,5	0,243	20,8
20	1,68	32	15,5	16,5	0,320	16,8
30	1,99	32	12,7	19,3	0,371	14,1
40	2,28	32	10,9	21,1	0,410	12,4
45	2,42	32	10,4	21,6	0,420	11,6
50	2,56	32	9,9	22,1	0,429	11,0
60	2,79	32	9,3	22,7	0,441	10,1
70	2,94	32	8,9	23,1	0,448	9,6
80	3,00	32	8,7	23,3	0,452	9,4
90	3,02	32	8,6	23,4	0,454	9,3
		3	4	5	6	7

Ici les nombres de la sixième colonne, exprimés en millièmes d'once, sont égaux à la résistance opposée au plateau incliné sous un angle désigné par le nombre correspondant dans la première colonne, lorsque ce plan fait une révolution, ou qu'il décrit l'espace de 28 $\frac{1}{7}$ pieds, dans le temps indiqué

dans la deuxième colonne, ou autrement lorsqu'il se meut avec une vitesse donnée par la septième colonne.

De tout ce qui a été fait pendant les deux derniers jours, il résulte qu'il n'existe pas de différence sensible entre les deux manières de placer la surface plane, savoir, en mettant sa longueur ou sa largeur dans la direction du bras, pourvu que son centre soit toujours, dans les deux cas, à la même distance de l'axe.

Mais maintenant, pour obtenir la loi de la résistance pour les différens angles d'inclinaison, avec une seule et même vitesse, il était nécessaire d'établir une nouvelle série d'expériences. Elles sont rapportées ci-après.

31 juillet 1788.

Baromètre, 29,91. Thermomètre, 72.

51. L'objet des expériences de ce jour fut de découvrir la résistance sur la même surface, pour chaque angle d'inclinaison, et pour une même vitesse, par exemple, de 20 pieds par seconde. Je commençai d'abord par essayer différens poids, en les augmentant successivement, afin d'atteindre cette vitesse.

ANGLES avec l'horizon.	POIDS moteurs.	TEMPS d'une révolution.	VITESSE par seconde.
	onces.	secondes.	pieds.
0°	19	1,50	18,76
"	20	1,43	19,68
"	22	1,43	19,68
"	23	1,33	21,16
10	24	1,43	19,68
"	25	1,40	20,10
20	26	1,76	16,00
"	27	1,73	16,27
"	28	1,67	16,85
"	29	1,65	17,06
"	30	1,58	17,81
"	32	1,56	18,04
"	34	1,52	18,51
"	36	1,48	19,02
"	38	1,44	19,54
"	40	1,36	20,69
30	44	1,60	17,59
"	48	1,54	18,27
"	52	1,43	19,68
"	56	1,40	20,10
40	64	"	"

Le fil s'étant rompu sous le poids de 64 onces, on n'a pas poussé plus loin les expériences tendantes à la recherche d'une vitesse de 20 pieds. J'ai donc été obligé de me contenter d'une moindre vitesse, d'une vitesse de 12 pieds par seconde, qui exigeait un poids moteur moins considérable; les résultats de ces essais sont détaillés ci-dessous.

ANGLES avec l'horizon.	POIDS moteurs.	TEMPS d'une révolut.	VITESSE par seconde.	EXCÈS des poids sur 10 onc.	RÉSISTANCE pour une vitesse de 12 pieds.	<i>Idem</i> , réduite.	RAPPORTS à la dernière résistance 0,841.	SINUS des angles.
0°	onces. 10	2"50	pieds. 11,25	onces. 0	onces. 0	onces. 0	0	0
5	10 $\frac{1}{4}$ 10 $\frac{3}{4}$	2,67 2,43	10,54 11,58	0 $\frac{1}{4}$ 0 $\frac{3}{4}$	0,81	0,016	19	87
10	12	2,50	11,25	2	2,28	0,044	52	173
20	15 16	2,73 2,50	10,31 11,25	5 6	6,84	0,133	158	342
30	24 26 28	2,37 2,26 2,19	11,87 12,45 12,85	14 16 18	14,31	0,278	331	500
40	32 34 36	2,40 2,30 2,26	11,72 12,23 12,45	22 24 26	23,09	0,148	533	643
50	39 40 41	2,40 2,39 2,38	11,72 11,77 11,83	29 30 31	31,34	0,609	724	766
60	43	2,50	11,25	33	37,60	0,730	868	866
70	44 45	2,58 2,55	10,91 11,04	34 35	41,49	0,805	957	940
80	46 47	2,60 2,52	10,88 11,14	36 37	43,06	0,836	994	985
90	48	2,50	11,25	38	43,35	0,841	1000	1000
1	2	3	4	5	6	7	8	9

52. Ayant trouvé, en prenant les moyens des résultats de plusieurs observations, les temps de chaque révolution (troisième colonne), la circonférence décrite, c'est-à-dire $28^{\pi} \frac{1}{7}$, divisée successivement par ces temps, donne les vitesses par seconde, telles qu'elles se trouvent dans la quatrième colonne.

Retranchant alors de chacun des poids de la deuxième colonne le premier de ces poids, c'est-à-dire 10 onces, qui correspond à la position horizontale du rectangle, dans laquelle il ne présente que son côté tranchant à l'air, il reste les poids de la cinquième colonne, qu'on peut regarder, à très peu de chose près, comme les poids moteurs agissant sur le cylindre de rotation.

Dans la sixième colonne sont les différentes résistances pour une vitesse de 12 pieds par seconde, en prenant pour cette vitesse ceux des nombres de la quatrième colonne qui approchent le plus de 12, et en établissant que les résistances sont proportionnelles à la puissance 2,04 de la vitesse, ainsi que nous avons vu que cela avait lieu dans les mouvements lents, différant peu les uns des autres.

Dans la septième colonne on a réduit les résistances, dans le rapport des distances du plan et du poids moteur à l'axe du cylindre, en les divisant par 51,51; ce sont là les vraies mesures de la résistance, exprimées en millièmes de l'once, pour une vitesse de 12 pieds par seconde, et pour chaque position du plan.

Dans la huitième colonne se trouvent les rapports de chacune de ces résistances à la plus grande ou dernière d'entre elles, rapports que l'on a obtenus en divisant chaque résistance par 0,841; ce qui a été fait afin de les comparer avec les sinus des mêmes angles d'inclinaison, tels qu'ils ont été portés dans la neuvième et dernière colonne. Il résulte de cette comparaison qu'il n'existe aucune proportion entre ces quantités; car, en partant de la position verticale ou de l'angle de 90° , les sinus décroissent plus rapidement que les rapports de résistances, jusqu'à l'angle de 60° , où ces quantités sont de nouveau égales entre elles; après quoi les rapports des résistances décroissent plus vite que les sinus, mais jamais aussi vite que les carrés des sinus, et bien moins encore que leurs cubes.

53. Mais si l'on voulait trouver quelque puissance ou fonction des sinus qui fût proportionnelle aux résistances, il est évident que l'exposant devrait être une variable qui deviendrait $= 1$, ou à peu près, pour l'angle de 60° ; au-dessous de 60° , cet exposant devra être plus grand que 1, mais moindre que 2, tandis qu'au-dessus il devrait se trouver entre 1 et 0. Maintenant on peut observer que les cosinus des angles vont en augmentant depuis l'angle de 90° jusqu'à l'angle 0° , de manière que leurs

doubles jouissent en effet de la propriété cherchée : car à 60° on a $2c = 1$; au-dessus de 60° , $2c$ est entre 1 et 0; et au-dessous $2c$ se trouve entre 1 et 2, en appelant c le cosinus de l'angle d'inclinaison. Calculons donc les différentes valeurs de S^{2c} (en appelant S le sinus pour tous les angles d'inclinaison, afin de les comparer aux résistances). Ce calcul fait, on trouve les valeurs suivantes :

ANGLES.	VALEURS de S^{2c} .	RÉSISTANCES.	DIFFÉRENCES.
5°	8	19	11
10	32	52	20
20	133	158	25
30	302	331	29
40	508	533	52
50	710	724	15
60	866	868	2
70	958	957	— 1
80	995	994	— 1
90	1000	1000	0

Il résulte de cette table, que les valeurs de S^{2c} s'accordent avec les rapports des résistances, à très peu de chose près, depuis l'angle de 90° jusqu'à 60° ; mais que de 60° à 30° , les différences vont en augmentant, tandis qu'elles diminuent de 30° à 0° . La plus grande différence correspond à 30° , où elle se trouve être $\frac{1}{11}$ du tout.

54. D'après cela il est probable que nous réussirons mieux si, au lieu de l'exposant $2c$, nous mettons dans la fonction l'exposant indéterminé nc , en l'appliquant à la résistance relative à l'angle de 30° , c'est-à-dire si nous nous proposons de trouver la valeur de n , telle que S^{nc} équivale à la résistance pour l'angle de 30° , ce qui revient à faire $S^{nc} = 331$. Cette équation devient, en prenant les logarithmes $nc \times \log S = \log 331$, d'où $n = \frac{\log 331}{c \log S} = 1,842$ environ. Formant alors les différentes valeurs de $S^{1,842c}$, on obtient les résultats suivans :

RECTANGLE.

ANGLES.	VALEURS de $S^{1,842c}$.	RÉSISTANCES.	DIFFÉRENCES.
5°	11	18	7
10	42	52	10
20	156	158	2
30	331	331	0
40	536	533	— 3
50	730	724	— 6
60	876	868	— 8
70	962	957	— 5
80	995	994	— 1
90	1000	1000	0

Ici les différences étant très petites, on peut conclure que la fonction $S^{1,842c}$ est une expression suffisamment exacte de la résistance pour tous les angles d'inclinaison. Cette expression étant multipliée par 0,841 pour la réduire en onces, on aura $0,841.S^{1,842c}$ pour la résistance en onces d'une surface plane de 32 pouces carrés ou de $\frac{2}{3}$ pieds carrés, inclinée sous un angle quelconque dont S est le sinus et c le cosinus, et qui se meut avec une vitesse de 12 pieds par seconde (1).

11 août 1788.

Baromètre, 30,08. Thermomètre, 60.

55. Voici ce qui donna lieu aux expériences de ce jour. J'avais comparé les dernières expériences faites sur le rectangle incliné suivant différents angles; avec celles qui furent faites précédemment sur la surface convexe du cône que j'avais cru pouvoir considérer comme si elle eût été développée ou déroulée en un triangle de même surface et incliné sous les mêmes angles. Mais les résistances ne s'étant pas trouvées en rapport avec les surfaces, j'imaginai que la différence pouvait tenir à la diversité de forme des deux figures ou surfaces comparées, l'une étant un

(1) 0,841 onces est la résistance qu'on a trouvée sous l'angle de 90°.

rectangle plan, et l'autre une surface conique, considérée comme un triangle roulé.

56. Je me procurai donc un triangle équilatéral en cuivre de même surface et de même poids environ que le rectangle précédemment employé, savoir, le triangle ayant $31\frac{2}{7}$ pouces carrés ou environ $\frac{2}{9}$ de pied carré, et je fis avec lui les expériences suivantes, en inclinant le plan sur la direction du mouvement suivant des angles qui augmentaient à chaque expérience de 5° , et ayant soin d'ailleurs de diriger, pour chaque inclinaison du plan, le sommet du triangle, tant en avant qu'en arrière, afin d'avoir les résistances pour ces deux positions; mais comme il n'en résulta aucune différence dans les deux résultats, les nombres dans la table ci-dessous ne sont relatifs qu'à une seule position, mais peuvent servir pour les deux. La ligne médiane du plan était à la distance de $53\frac{3}{4}$ pouces de l'axe du mouvement, en sorte que la vitesse de cette ligne était à celle du poids moteur comme $51,51 : 1$ (1). Les poids ont été graduellement modifiés pour chaque inclinaison, de manière à pouvoir faire exécuter au plan deux révolutions uniformes en 5 secondes de temps, dans lequel cas sa vitesse était de $11\frac{1}{4}$ pieds par seconde, ou mieux $11^{\text{pi}},26$.

57. Ayant donc placé les différens angles dans la première colonne de la table suivante, et dans la deuxième les poids moteurs, faisant faire deux révolutions en 5 secondes, la troisième renferme les différences entre le premier poids relatif à la position horizontale, et chacun des poids suivans, et donne par conséquent les résistances pour une vitesse de $11^{\text{pi}},26$, déduction faite de la résistance du bras et du frottement de la machine. Ces mêmes nombres ont ensuite été élevés dans le rapport de $11,26^{2,04} : 12^{2,04}$, ou à peu près dans celui de $7 : 8$, et donnent les résistances pour une vitesse de 12 pieds. Ils sont compris dans la quatrième colonne. Dans la cinquième colonne on a placé les nombres de la 4^e colonne, augmentés dans le rapport de la surface $31\frac{2}{7}$ du triangle à la surface 32 du rectangle, c'est-à-dire dans le rapport de $42 : 44$ ou $1 : 1\frac{1}{43}$.

(1) Comme $53,75 : 1,042 =$ rayon du cylindre augmenté de celui du fil. (Voyez § 11.)

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL.

ANGLES avec la direction.	POIDS moteurs.	RÉSISTANCE pour une vitesse de 11 pi, 26.	Idem, pour une vitesse de 12 pieds.	Idem, pour une surface de 32 pouces.	RÉSISTANCES réduites.	RAPPORTS avec la dernière.	SINUS des angles.
	onces.	onces.	onces.	onces.	onces.		
0°	10	0,0	0,0	0,0	0,000	0,000	0,000
5	10,7	0,7	0,8	0,8	0,015	0,018	0,087
10	11,8	1,8	2,0	2,0	0,039	0,046	0,174
15	13,4	3,4	3,9	4,0	0,077	0,091	0,259
20	15,8	5,8	6,6	6,8	0,132	0,156	0,342
25	19,0	8,0	10,3	10,5	0,204	0,241	0,423
30	23,0	13,0	14,8	15,1	0,294	0,347	0,500
35	27,3	17,3	19,7	20,1	0,390	0,461	0,574
40	31,6	21,6	24,7	25,2	0,490	0,579	0,643
45	35,4	25,4	29,0	29,7	0,577	0,682	0,707
50	38,6	28,6	32,7	33,5	0,650	0,768	0,766
55	41,1	31,1	35,5	36,3	0,705	0,833	0,819
60	43,0	33,0	37,7	38,6	0,750	0,886	0,866
65	44,5	34,5	39,4	40,3	0,783	0,925	0,906
70	45,7	35,7	40,8	41,8	0,809	0,956	0,940
75	46,4	36,4	41,6	42,6	0,827	0,977	0,966
80	46,9	36,9	42,1	43,1	0,837	0,989	0,985
85	47,2	37,2	42,5	43,5	0,845	0,998	0,996
90	47,3	37,3	42,6	43,6	0,846	1,000	1,000
1	2	3	4	5	6	7	8

Les nombres de la cinquième colonne ayant été divisés chacun par 51,51, pour rapporter les poids de la surface du cylindre à l'extrémité du bras, les quotiens qui donnent les vraies mesures des résistances se trouvent compris dans la sixième colonne. Enfin, chacune de ces dernières ayant été divisée par la plus grande 0,846, on obtient leurs rapports en nombres qu'on peut facilement comparer avec les sinus des angles. Ces rapports occupent la septième colonne, la huitième et dernière étant occupée par les sinus des angles d'inclinaison.

Il suffit de jeter un coup d'œil comparatif sur ces résultats et sur ceux obtenus pour le rectangle équivalent, pour voir qu'ils diffèrent très peu l'un de l'autre; ce qui démontre que les aires de deux surfaces planes étant égales, une différence dans la figure de ces surfaces n'en produit pas de sensible dans les résistances.

58. On a construit par interpolation la table suivante, qui donne, de degré en degré, les rapports des résistances ainsi que les sinus des angles d'inclinaison.

ANGLES.	RAPPORTS.	SINUS.	ANGLES.	RAPPORTS.	SINUS.	ANGLES.	RAPPORTS.	SINUS.
1°	3	17	31°	369	515	61°	895	875
2	6	35	32	392	530	62	903	883
3	10	52	33	415	545	63	911	891
4	14	70	34	438	559	64	918	899
5	18	87	35	461	574	65	925	906
6	23	105	36	484	588	66	932	914
7	28	122	37	507	602	67	938	921
8	34	139	38	531	616	68	944	927
9	40	156	39	555	629	69	950	934
10	46	174	40	579	643	70	956	940
11	53	191	41	602	656	71	961	946
12	61	208	42	623	669	72	966	951
13	70	225	43	643	682	73	971	956
14	80	242	44	663	695	74	974	961
15	91	259	45	682	707	75	977	966
16	102	276	46	700	719	76	980	970
17	114	292	47	718	731	77	983	974
18	127	309	48	735	743	78	985	978
19	141	326	49	752	755	79	987	982
20	156	343	50	768	766	80	989	985
21	171	358	51	783	777	81	991	988
22	187	375	52	797	788	82	993	990
23	204	391	53	810	799	83	995	993
24	222	407	54	822	809	84	997	995
25	241	423	55	833	819	85	998	996
26	261	438	56	845	829	86	999	998
27	282	454	57	856	839	87	999	999
28	303	469	58	866	848	88	999	999
29	325	481	59	876	857	89	1000	1000
30	347	500	60	886	866	90	1000	1000

Dans cette table les nombres de la deuxième colonne étant multipliés par 84, et divisés par 1000, donnent en parties décimales de l'once les résistances sur une surface plane de 32 pouces carrés, se mouvant avec une vitesse de 12 pieds par seconde, et frappant l'air sous les différens angles désignés dans la première colonne. La formule générale pour chaque position de la surface est $84 S^n$, dans laquelle S exprime le sinus et c le cosinus de l'angle d'inclinaison, n étant $= 1,842$ ou simplement 1,84. Pour d'autres surfaces et d'autres vitesses, la formule varierait d'une part, à peu près dans le rapport des surfaces, ou environ de $\frac{1}{7}$ au-dessus de ce rapport, et d'autre part, en raison de la puissance 2,04 à peu près de la vitesse;

autrement, pour toute autre surface plane a plus grande et pour une vitesse v , la formule serait, à peu de chose près, $0,03. av^{2,04} S^{1,84}$ onces. Pour tout autre fluide que l'air, par exemple, pour de l'eau, l'énoncé du théorème varierait en raison de la densité du fluide.

59. Quoique la figure de la surface plane ne produise pas de différence sensible dans la résistance, on ne pourrait pas cependant appliquer les résultats obtenus pour le plan aux surfaces courbes telles que la sphère ou le cône, ainsi qu'on peut s'en convaincre aisément par la table (n° 42), où l'on voit que la partie convexe de l'hémisphère supporte, sur une surface double de sa base, une résistance moindre que la moitié de celle qu'éprouve cette base; de même la convexité du cône sur une surface d'environ 74 pouces carrés sous un angle de $25^{\circ} 42'$ avec la direction du mouvement, éprouve proportionnellement beaucoup moins de résistance que le plan sous un angle égal; car les surfaces sont ici dans le rapport 74 : 32, ce qui est plus du double, tandis que les résistances sont dans le rapport de 376 à 255, moindre que celui de 3 à 2.

XXXVII^e TRAITÉ.

Théorie et pratique de l'Artillerie, ayant égard à la résistance de l'air.

1. L'on se propose, dans ce traité, de tirer des conséquences générales de la longue série d'expériences faites dans les traités 34 et 36, et de les appliquer aux différens cas de l'Artillerie théorique et pratique, en tant qu'ils sont modifiés et influencés par la résistance de l'air, dont nous connaissons maintenant assez bien les divers effets.

2. Dans plusieurs endroits de mon Cours de mathématiques, on trouve différentes notions sur cet objet, avec ou sans égard à la résistance de l'air. C'est ainsi que, dans le second volume de ce Cours, aux propositions 19, 20, 21, 22, nous avons donné tous les principes relatifs à la trajectoire parabolique (1), c'est-à-dire les lois qui règlent le mouvement des projectiles, lorsque ce mouvement n'est pas troublé par la résistance du milieu que ces projectiles traversent. Cette résistance est tellement considérable, qu'un grand nombre de projectiles, et surtout les boulets d'un petit dia-

(1) On trouve ces principes dans tous les traités de Mécanique.

mètre, lancés avec une grande vitesse, donnent une amplitude qui n'est que la vingtième partie de ce qu'elle serait dans le vide. La théorie parabolique ne peut donc servir que dans les mouvemens lents n'excédant pas une vitesse de 200, 300 ou 400 pieds par seconde, parce qu'alors la courbe décrite diffère peu de la parabole. A la page 160, etc., nous avons donné différentes autres règles et formules qui résultent en partie de la théorie précédente de la parabole et en partie des résultats de certaines expériences faites avec des boulets de canon.

Nous avons fait connaître (page 219 du Cours) la théorie et le calcul d'une très belle expérience, exécutée par M. Robins, pour déterminer le véritable degré de vitesse que prend un boulet, la charge de poudre étant connue. L'idée de cette expérience consiste simplement à lancer les boulets contre une grosse masse de bois très mobile, et dont la petite vitesse qui naît de ce choc peut être facilement observée et exactement mesurée. En effet, quand on a obtenu cette dernière vitesse, celle du boulet s'en déduit immédiatement par cette proportion, le poids du boulet est à la somme des poids du boulet et du bloc, comme la vitesse observée de ce dernier est à un quatrième terme qui sera la vitesse cherchée du boulet. Il est évident que ce genre d'expérience doit mener à une foule de résultats utiles : tels sont ceux relatifs à la longueur et au calibre des pièces et à celui des boulets, aux différentes charges de poudre et à leur qualité ; et enfin cette expérience donnera la solution de toutes les questions relatives aux projectiles, excepté ce qui concerne l'étendue de la portée. On peut aussi se servir du même moyen pour déterminer la résistance de l'air, en plaçant le pendule de bois à différentes distances de la pièce, et examinant les vitesses perdues par les projectiles pendant leur trajet dans l'air à ces différentes distances. Tous ces objets ont été amplement exposés dans le 34^e Traité (1).

3. Enfin, dans le 17^e problème sur les forces, presque à la fin de ce volume du Cours, nous avons appliqué avec succès les résultats du même genre d'expériences à la détermination des différentes circonstances qui accompagnent le dégagement du fluide élastique de la poudre enflammée et sa vitesse d'expansion, circonstances qui n'ont jamais été auparavant déterminées avec précision. M. Robins et d'autres auteurs (qu'il me soit permis de le dire) ont plutôt offert des conjectures que des résultats positifs. A la vérité cet ingénieux physicien avait observé qu'en mettant le feu à un grain de poudre à canon, il se dégagait une quantité de fluide élastique qui, étant

(1) Voyez la Préface.

réduit à un espace égal à celui qu'il occupait avant l'inflammation, acquérait une force élastique 250 fois plus grande que celle de l'air atmosphérique ordinaire. Il a ensuite élevé le même volume d'air à la température du fer rouge, et il trouva que sa force était quadruplée ; de là il conclut que la force primitive du fluide, dégagé de la poudre, devait être 4×250 , ou 1000 fois plus grande que celle de la pression atmosphérique ; mais cette température qu'il attribue au fluide enflammé, et la force qu'il en déduit, ne sont que des conjectures, et, dans le fait, l'une et l'autre sont plus considérables. Il est vrai que ce degré de force assigné par l'auteur s'accorde parfaitement avec ses expériences ; mais cet accord apparent ne vient, comme on peut facilement s'en convaincre, que de l'inexactitude de ces expériences. Ayant été placé plus favorablement que M. Robins pour les répéter, j'ai observé que la poudre enflammée a une force double de celle qu'il lui a assignée, et que sa vitesse d'expansion est d'environ 5000 pieds par seconde.

4. Convaincu de l'importance de ce genre d'expériences, faites d'abord par M. Robins avec des balles de mousquet seulement, je me suis efforcé, depuis plusieurs années, de les continuer en grand avec des boulets de canon. Ayant eu l'honneur d'être appelé à différentes épreuves faites à Woolwich par les officiers du Corps royal d'Artillerie, sous la direction du grand-maître, j'ai poursuivi ces sortes de recherches pendant plusieurs années avec une attention particulière. Les premières épreuves ont eu lieu en 1775, deux ans après notre installation comme professeur à l'Académie royale ; nous en avons rendu compte dans les Transactions philosophiques de 1778. Notre Mémoire fut couronné par la Société royale, et la médaille d'or de cette année nous fut décernée, ainsi qu'il a été rapporté au commencement du 34^e Traité, où l'on trouve aussi les résultats des premières et des secondes épreuves, faites en 1783, 84, 85 et 86.

5. Nous n'en rappellerons ici qu'un petit nombre. Dans ces épreuves, on a employé quatre canons de bronze bien calibrés et fondus pour cet objet. Leurs longueurs étaient différentes, mais toutes les autres parties, poids, calibres, etc., étaient les mêmes ; les longueurs des âmes de ces canons étaient comme il suit :

Pièce n° 1.....	15 calibres, longueur de l'âme 28,5 pouces.
2.....	20 38,4
3.....	30 57,7
4.....	40 80,2.

Le calibre de chacune était de $2\frac{1}{5}$ de pouce, et le poids moyen des boulets de 16 onces 13 dragmes.

6. Les vitesses moyennes avec lesquelles les boulets frappaient le pendule placé à une distance de 32 pieds de la bouche de canon, pour diverses charges de poudre, sont consignées dans le tableau suivant:

Table des vitesses initiales.

POIDS de la charge.	Vitesse en pieds par seconde, des projectiles.			
	N° 1.	N° 2.	N° 3.	N° 4.
onces.				
2	780	835	920	970
4	1100	1180	1300	1370
6	1340	1445	1590	1680
8	1430	1580	1790	1940
12	1436	1640	»	»
14	»	1660	»	»
16	»	»	2000	»
18	»	»	»	2200.

On voit en général par là dans quel rapport les vitesses augmentent avec les charges pour chaque pièce, et comme, à égalité de charges, les vitesses croissent avec les longueurs des pièces.

7. En augmentant les charges de poudre, on a trouvé que les vitesses augmentent aussi jusqu'à ce qu'elles atteignent une certaine limite, différente pour chaque pièce, après quoi elles diminuent continuellement, jusqu'à ce que l'âme soit entièrement remplie par la charge; les quantités de poudre correspondantes au maximum de vitesse varient, comme on devait s'y attendre, avec les longueurs des canons. Le poids de la poudre, l'espace qu'elle occupe dans l'âme, et le rapport de cet espace avec celui de toute l'âme, sont marqués dans le tableau suivant, qui se rapporte aux charges de plus grand effet.

NUMÉROS des pièces.	LONGUEUR de l'âme.	CHARGES DE PLUS GRAND EFFET.		
		POIDS en onces.	LONGUEUR de la charge	
			en pouces.	rappel à la longueur d'âme.
1	28,5	12	8,2	$\frac{3}{10}$
2	38,4	14	9,5	$\frac{3}{12}$
3	57,7	16	10,7	$\frac{3}{15}$
4	80,2	18	12,1	$\frac{3}{20}$

8. Quelques expériences ont été faites pour obtenir les portées et les temps du trajet; le tableau suivant renferme les résultats moyens.

NUMÉROS des canons.	POIDS de la charge.	POIDS des boulets.	DIAMÈTRE des boulets.	ANGLE du tir.	TEMPS du trajet.	AMPLITUDE.	VITESSE initiale.
	onces.	onc. dr.	pouces.		secondes.	pieds.	pieds.
2	2	16 10	1,96	45°	21,2	5109	863
	2	16 5	1,96	15	9,2	4130	868
	4	16 8	1,96	15	9,2	4660	1234
	8	16 12	1,96	15	14,4	6066	1644
	12	16 12	1,95	15	15,5	6700	1676
3	8	15 10	1,96	15	10,1	5610	1938

Ce tableau contient les données suivantes, déterminées avec un assez grand degré de précision, savoir : le poids de la poudre, le poids et le diamètre des boulets, la vitesse initiale du projectile, l'angle d'élevation de la pièce, le temps du trajet dans l'air, exprimé en secondes, et la grandeur de l'amplitude ou la distance horizontale du point de chute à la bouche du canon. Il est à espérer qu'on retirera de ces expériences quelques résultats avantageux concernant la résistance des milieux et les effets des projectiles lancés sous différentes élévations de la pièce, et qu'on obtiendra ainsi des règles faciles pour le tir.

9. Une autre recherche, dans les expériences précédentes, avait pour objet de découvrir de combien s'enfonçaient dans un bloc de bois d'orme des boulets lancés dans la direction des fibres de ce bois. Le tableau ci-joint montre les résultats d'un petit nombre d'expériences faites avec la

pièce n° 2, et le plus souvent avec les charges de 2, 4 et 8 onces de poudre, et les pénétrations moyennes, placées dans la dernière ligne, sont de 7, 15 et 20 pouces pour ces charges respectives.

PÉNÉTRATION DES BOULETS dans le bois d'orme, avec une charge de poudre de		
2 onces.	4 onces.	8 onces.
7	16,6	18,9
	13,5	21,2
		18,1
		20,8
		20,5
Moyenne. 7	15	20

Ces pénétrations sont à peu près entre elles comme les nombres 2, 4, 6 ou 1, 2, 3, tandis que les charges de poudre étaient comme 2, 4, 8 ou 1, 2, 4; ainsi les pénétrations sont proportionnelles aux charges jusqu'à 4 onces, et dans un rapport moindre pour 8 onces, tandis que, d'après la théorie des pénétrations, les profondeurs doivent être proportionnelles aux charges quelles qu'elles soient, ou, ce qui revient au même, au carré des vitesses; en sorte qu'il paraît que la résistance du bois n'est pas constamment la même, mais qu'elle augmente un peu avec la vitesse du boulet. Cette circonstance tient probablement à la plus grande quantité de fibres comprimées par le boulet, ce qui contribue à augmenter le ressort et la résistance du bois, et à diminuer la profondeur des pénétrations.

10. En jetant un coup d'œil général sur la seconde série d'épreuves (1), on y trouvera la confirmation de toutes les observations faites dans la première, concernant la vitesse et les poids des boulets, et les charges de poudre, etc. Il paraît donc que la vitesse du boulet croît avec la charge jusqu'à un certain point qui est particulier à chaque pièce, et qu'en continuant encore à augmenter la charge jusqu'à ce que l'âme soit entièrement remplie de poudre, la vitesse diminue graduellement; que cette charge qui convient à la plus grande vitesse est d'autant plus grande

(1) Voyez première partie, page 113.

que la pièce est plus longue ; néanmoins elle ne croît pas dans le même rapport que la longueur de la pièce, en sorte que le rapport de la partie de l'âme remplie de poudre à celle qui ne l'est pas est moindre dans des pièces longues que dans des pièces courtes ; et en effet la partie remplie est à peu près en raison inverse de la racine carrée de la partie vide, pour la charge à maximum d'effet.

11. Il paraît que la vitesse à charges égales va en augmentant avec la longueur de l'âme, quoique cette vitesse augmente dans un bien moindre rapport que cette longueur. Car les vitesses sont dans un rapport moindre que la racine carrée de la longueur de la pièce ; et plus grand que la racine cubique, dans un rapport qui tient à peu près le milieu entre ces deux-ci.

12. Le tableau des amplitudes nous montre que l'amplitude augmente dans un rapport beaucoup moindre que la vitesse, la pièce et l'élévation restant les mêmes. Et si l'on compare ce résultat avec le rapport qui existe entre les vitesses et la longueur des pièces, il devient évident que l'on gagne très peu sur les portées par une grande augmentation de la pièce, en supposant que la charge reste toujours la même ; en effet, la portée est environ comme la racine 5^e de la longueur de l'âme ; ce rapport fournit un accroissement si faible, qu'il ne produit qu'une augmentation d'un 7^e d'amplitude environ pour une pièce de longueur double. L'on voit aussi, par ce tableau, que le temps du trajet du boulet est à peu près proportionnel à l'amplitude, toujours pour la même pièce et le même degré d'élévation.

13. De cette même série d'épreuves, il résulte aussi qu'on n'obtient aucune différence dans les portées, en variant le poids de la pièce, ou en faisant usage de bouchons, ou en bourrant de différentes manières, ou en mettant le feu à divers points de la charge, mais que l'on produit une très grande différence dans la vitesse par le plus ou moins de vent donné au boulet. En effet, avec le vent qui existe ordinairement, c'est-à-dire environ le 20^e du calibre, il ne s'échappe pas moins qu'entre $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ de poudre qui se trouve ainsi perdue, et comme souvent les diamètres des boulets sont au-dessous du calibre fixé par les réglemens, il arrive fréquemment que la moitié de la poudre est perdue par un vent trop considérable.

14. L'on voit également que la résistance que le bois oppose aux boulets n'est pas constante, et que les longueurs des pénétrations des boulets sont à peu près comme les logarithmes des charges, au lieu d'être comme les charges elles-mêmes, ou, ce qui revient au même, comme le carré de la vitesse. Enfin, ces expériences et beaucoup d'autres montrent que les boulets dévient beau-

coup de la direction dans laquelle ils ont été projetés, et cela de plus de 3 à 400 yards, sur une portée d'un mille, c'est-à-dire au moins du quart (1).

15. Procédons maintenant à établir les conséquences que l'on peut tirer, et les applications que l'on peut faire des expériences des années 1787, 1788, 1789 et 1790. Elles avaient principalement pour objet la résistance que l'air oppose aux boulets dans leur rapide trajet à travers ce fluide. Pour déterminer la résistance due à de très grandes vitesses, on a employé des boulets de trois calibres différens, de 2, 2,78 et 3,5 pouces de diamètre. Ils furent projetés avec des vitesses de 300 jusqu'à 2000 pieds par seconde, et l'on fit les expériences de manière à frapper le pendule à différentes distances de la pièce, afin de connaître les vitesses perdues pendant le passage à travers ces différens espaces d'air. Par là on obtint la résistance convenable à chaque vitesse. Ces séries de résistances, pour les trois sortes de boulets mentionnés ci-dessus, ont été obtenues avec une régularité remarquable, non-seulement pour chaque série, mais encore dans la comparaison des séries entre elles; les termes de chaque série suivent une certaine loi uniforme relativement à la vitesse; ces résistances sont à peu près proportionnelles à la vitesse élevée à la puissance $2\frac{1}{2}$, et le termes d'une série, comparés aux termes correspondans d'une autre, la vitesse étant la même, sont aussi dans un rapport constant, c'est-à-dire que les résistances, à égalité de vitesse des projectiles, sont entre elles comme les surfaces des boulets ou comme les carrés de leurs diamètres, augmentant cette résistance d'un vingtième, en comparant un petit boulet à un grand, et en diminuant d'un vingtième dans la comparaison d'un grand à un petit boulet.

16. Les mêmes lois de résistance ont également été observées dans les petits mouvemens au moyen de la machine de rotation dont il a été question dans le 36^e Traité, en faisant varier les vitesses pour le même corps, ou en variant les formes des corps et donnant toujours la même vitesse. De cette uniformité d'effets, il résulte que les nombres provenant des grandes vitesses trouvées dans la première série d'expériences, et ceux des petites vitesses de la seconde, sont comme s'ils ne formaient que les divers termes d'une même série. Ces circonstances nous permettent à juste titre de remplir par interpolation les places intermédiaires, depuis 300 pieds, la plus petite des grandes vitesses, jusqu'à 20 pieds, la plus grande des petites vitesses.

(1) Ce qui précède est le résumé des expériences contenues dans la première partie de cet ouvrage.

De cette manière on a obtenu la série complète qui suit, de vitesses et de résistances pour un boulet ayant exactement 2 pouces de diamètre.

17. Table de la résistance qu'oppose l'air à un boulet de 2^{po} de diamètre

VITESSES par seconde.	RÉSISTANCES d'après l'expérience.	RÉSISTANCES d'après la théorie.	RAPPORT des deux résistances.	RÉSISTANCES expériment. en fonctions des puissances de la vitesse.	RÉSISTANCES expériment. en lb.
5	0,006	0,005	1,20		
10	0,026	0,021	1,23		
15	0,058	0,046	1,25		
20	0,103	0,082	1,26		
25	0,163	0,128	1,27		
30	0,237	0,184	1,29		
40	0,427	0,329	1,30		
50	0,676	0,511	1,32		
100	2,78	2,046	1,36		0,174
200	11,34	8,18	1,39	2,028	0,709
300	25,8	18,4	1,42	2,028	1,612
400	46,5	32,7	1,43	2,032	2,906
500	74,4	51,2	1,46	2,042	4,650
600	110,4	73,6	1,50	2,055	6,900
700	156,0	100,2	1,55	2,069	9,750
800	212,0	130,9	1,62	2,084	13,250
900	280,3	165,7	1,69	2,099	17,519
1000	362,1	204,6	1,77	2,115	22,625
1100	456,9	247,6	1,84	2,128	28,556
1200	564,4	294,6	1,91	2,138	35,275
1300	683,3	345,7	1,98	2,146	42,706
1400	811,5	401,0	2,03	2,151	50,719
1500	947,1	460,1	2,06	2,153	59,194
1600	1086,9	523,7	2,08	2,152	67,931
1700	1228,4	591,2	2,07	2,150	76,775
1800	1368,6	662,8	2,06	2,145	85,537
1900	1505,7	738,5	2,03	2,141	94,106
2000	1637,8	818,3	2,00	2,136	102,362

18. La première colonne renferme les vitesses depuis 5 pieds jusqu'à 2000 pieds par seconde, et dans la seconde colonne sont placées les résistances correspondantes exprimées en onces (avoir-du-poids). Afin d'établir des comparaisons, on a mis dans la troisième colonne les résistances correspondantes pour le même boulet, déduites de la théorie connue des résistances considérées comme proportionnelles au carré de la vitesse. La formule pour cet objet se trouve dans le vingtième problème, page 167,

2^e volume de mon Cours de Mathématiques, et l'on a $\frac{pnd^2}{32g} v^2 = r$ (1) la résistance; or $p = 3,1416$, $n =$ la pesanteur spécifique du milieu, $g = 16$, $d =$ le diamètre du boulet, $v =$ sa vitesse exprimés l'un et l'autre en pieds, pour les boulets de 2 pouces ou de $\frac{1}{6}$ de pied de diamètre, on a $d = \frac{1}{6}$, ensuite $n = 1 \frac{1}{5}$ once, pesanteur spécifique de l'air. La formule devient $\frac{1}{4888} v^2$ ou $\frac{9}{44000} v^2 = r$; de là on tirera facilement les séries de résistance, en divisant le carré de la vitesse par 4888, ou, ce qui est plus aisé, en divisant le carré du triple des vitesses par 44000. C'est de cette manière qu'on a calculé les résistances placées dans la troisième colonne.

19. Pour établir une comparaison entre les séries des résistances données par l'expérience et la théorie, on a divisé chaque nombre de la deuxième colonne par le nombre correspondant de la suivante ou troisième, et les quotiens sont placés dans la quatrième. On voit que, dans le commencement, ou lorsque les vitesses sont encore très faibles, la résistance expérimentale l'emporte d'environ $\frac{1}{3}$ sur la résistance théorique, c'est-à-dire qu'elles sont dans le rapport de 6 à 5. Lorsque les vitesses augmentent, la seconde colonne gagne de plus en plus sur la troisième, jusqu'à la vitesse de 1600 pieds par seconde, où la différence est la plus grande. Alors la première est plus du double de la seconde ou dans le rapport de 2,08 à 1, et après cela les vitesses croissant toujours et les rapports décroissant, ce rapport à 2000 pieds de vitesse par seconde n'est plus que celui de 2 à 1 environ.

20. Aux quatre premières colonnes on en a ajouté une cinquième, pour montrer suivant quelle puissance de la vitesse la résistance augmente à chaque point; ces exposans se trouvent en comparant constamment une résistance expérimentale donnée, par exemple, celle répondant à une vitesse de 100 pieds par seconde, successivement avec chacune des suivantes, d'abord celle de 100 avec celle de 200, ensuite celle de 100 avec celle de 300, et ainsi de suite jusqu'à la fin. Par ce moyen l'on voit que l'exposant de la puissance va graduellement en augmentant depuis la seconde puissance qui correspond à la plus petite vitesse, jusqu'à la vitesse de 1500 à 1600 pieds par seconde, alors l'exposant est de 2,153 ou $2 \frac{1}{7}$, et plus approximativement $2 \frac{2}{13}$, c'est-à-dire que la résistance qui correspond à la vitesse de 100 pieds est à celle qui correspond à 1600 pieds, comme $100^{2,153}$ est à $1600^{2,153}$, ou comme 1 est à $16^{2,153}$; en sorte que si r représente 2,78, qui est la ré-

(1) Voyez Bezout, Cours à l'usage du Corps royal d'Artillerie, t. IV, n^{os} 379 et 396.

sistance correspondante à la vitesse de 100 pieds, $2,78 \times 16^{2,153}$ représentera la résistance qui correspond à la vitesse de 1600 pieds, et ainsi pour les autres. Après que l'exposant a atteint son maximum (2,153), il décroît graduellement. Il est bon de remarquer que la moyenne arithmétique entre toutes les puissances est de 2,104 ou $2\frac{1}{10}$ environ. La sixième colonne exprime les résistances en livres (avoir du poids).

21. La méthode pour déterminer les indices de ces puissances est la même que celle employée dans l'article 43 du trente-sixième Traité, c'est-à-dire qu'étant données les deux vitesses v et v' , leurs résistances correspondantes r et r' , pour trouver à quelles puissances de v et v' les résistances r et r' sont proportionnelles, représentons par x l'exposant de la puissance des deux vitesses v et v' , alors on a $v^x : v'^x :: r : r'$, et en divisant les conséquens par les antécédens, on a $1 : \left(\frac{v'}{v}\right)^x :: r : r'$; de là $\left(\frac{v'}{v}\right)^x = \frac{r'}{r}$; prenant les logarithmes, il vient $x \times \log \frac{v'}{v} = \log \frac{r'}{r}$ d'où l'on tire $x = \frac{\log r' - \log r}{\log v' - \log v}$. C'est-à-dire que l'exposant de la puissance des vitesses auquel les résistances sont proportionnelles, est égal au quotient de la différence des logarithmes des résistances, divisé par la différence des logarithmes des vitesses. Pour appliquer ce théorème aux résultats renfermés dans le tableau précédent, en commençant par la vitesse de 100, on observera que les quotiens de vitesses 200, 300, 400, etc., divisés par 100, sont 2, 3, 4, etc., dont les logarithmes seront les diviseurs correspondans à la différence entre le logarithme de la résistance correspondant à 100, et celui de chacune des suivantes, et en substituant ces nombres dans la valeur de x , on aura les exposans des puissances de la vitesse placés dans la cinquième colonne.

22. La variabilité de l'exposant x provient principalement de ce que le projectile, dans sa course, condense l'air qui est au-devant et raréfie le fluide qu'il laisse derrière lui. C'est un fait bien connu que l'air, ne se précipite dans le vide qu'avec une vitesse déterminée qui est de 1200 ou de 1400 pieds par seconde. Or, quand le boulet se meut dans l'air, il laisse toujours derrière lui un vide qui est partiel ou complet; ce vide est d'autant plus grand que la vitesse est grande, jusqu'à ce qu'enfin la vitesse du boulet soit égale à celle de l'air, alors le vide est parfait et continue à l'être tant que la vitesse du boulet augmente. Ainsi on peut assigner trois causes à la résistance qu'éprouve le boulet dans son

trajet : 1°. l'inertie des molécules d'air qu'il frappe dans sa course ; 2°. l'accumulation d'air élastique devant lui ; 3°. enfin la pression continue qu'éprouve la partie antérieure lorsque sa vitesse est telle qu'elle laisse derrière elle un vide total ou imparfait ; car tant que le boulet est en repos, il est évident que la pression de l'atmosphère est égale de tous côtés ; mais dès que le boulet commence à se mouvoir, il est évident aussi que la pression qui a lieu dans le sens du mouvement, derrière, est moindre que celle qui a lieu de front, et la différence doit être d'autant plus grande que le mouvement du boulet est plus rapide ; cette différence est en effet à peu près proportionnelle à la vitesse du boulet, comparée à celle de l'air entrant dans un vide parfait, quand la première n'est pas plus grande que la seconde ; car dès que la vitesse du boulet devient égale à celle de l'air, et qu'elle continue à augmenter, le boulet a à soutenir à sa partie antérieure, toute la pression de l'atmosphère, sans être balancée par aucune contre-pression dans sa partie postérieure.

23. Nous voyons donc que le boulet éprouve deux sortes de résistances (faisant abstraction de la compression de grandeur inconnue qui a lieu à sa partie antérieure) : la première vient de la percussion du boulet contre les particules d'air qu'il choque et déplace dans son trajet, et qui augmente continuellement, en raison double de la vitesse du boulet ; la seconde, qui naît du poids de l'atmosphère, augmente continuellement avec la vitesse à laquelle, comme pression, elle est proportionnelle, jusqu'à ce que cette résistance ait atteint son maximum, ce qui arrive lorsque la vitesse du projectile est égale ou plus grande que la vitesse avec laquelle l'air entre dans le vide. Alors la résistance devient une quantité constante pour toutes les vitesses plus grandes. Ces circonstances font voir clairement pourquoi les résistances trouvées par l'expérience sont dans un rapport toujours croissant, et continuellement dans un rapport plus grand que celui du carré de la vitesse, jusqu'à ce que cette vitesse surpasse celle de 12 à 1400 pieds par seconde ; alors le rapport diminue. En sorte qu'il paraît que l'expression de toute la résistance peut être considérée comme composée de deux termes : le premier proportionnel au carré de la vitesse, et le second proportionnel à la vitesse seulement.

24. Outre les expériences dont nous avons parlé plus haut, on en fit encore d'autres avec des pièces de canon et des mortiers tirés sous différents angles d'élévation, et en donnant aux projectiles différentes vitesses pour observer l'amplitude du jet, le temps du trajet et l'angle de chute.

Le tableau synoptique suivant renferme les résultats des expériences de ce genre.

NUMÉROS.	ANGLE de projection.	POIDS des projectiles.	DIAMÈTRE des projectiles.	VITESSE par seconde.	TEMPS du trajet.	AMPLITUDE.	OBSERVATIONS.
		livres.	pouces.	pieds.	secondes.	pieds.	
1	45°	1,04	1,96	863	21,2	5109	Boulets d'une livre.
2	15	1,02	1,96	868	9,2	4130	
3	15	1,03	1,96	1234	9,2	4660	
4	15	1,06	1,96	1644	14,4	6066	
5	15	1,06	1,96	1676	15,5	6700	
6	15	1,03	1,96	1630	10,1	5610	
7	45	14,25	4,43	197	4,5	256	Bombes remplies de plomb.
8	45	14,25	4,43	297	7,0	870	
9	45	12,88	4,49	207	5,0	376	Boulets de fer.
10	45	12,88	4,49	293	8,0	1068	
11	45	8,70	4,43	252	5,0	368	Bombes remplies d'eau.
12	45	8,56	4,43	380	9,0	1083	
13	45	8,35	4,44	257	5,7	426	Bombe vide.
14	45	1,38	4,40	633	6,0	505	Boulet de chêne.
15	45	0,40	4,40	1175	5,5	408	Boulet de papier.
16	60	64,0	7,69	564	24,5	4350	Boulet.
17	60	48,0	7,69	651	26,8	4950	Bombe.
18	60	128,0	9,74	556	25,5	5220	Boulet.
19	60	96,0	9,74	643	27,0	5790	Bombe.
20	45	3,0	2,78	1200	"	7360	"
21	45	3,0	2,78	860	23,0	5850	"
22	45	3,0	2,78	600	16,0	3870	"
23	45	3,0	2,78	860	22,5	5850	Boulets.
24	30	3,0	2,78	1200	22,0	7680	
25	20	3,0	2,78	1200	12,0	4800	"
26	45	3,0	2,78	1200	"	7360	"
27	45	3,0	2,78	1697	"	8130	Angle de chute, 61° $\frac{1}{2}$.
28	75	3,0	2,78	1200	"	5960	Boulets.
29	75	3,0	2,78	1697	"	6130	Idem.
30	35	48,0	7,69	571	"	6150	Bombe.
31	35	48,0	7,69	571	"	5100	
32	45	96,0	9,74	430	"	6080	Idem.

Dans les problèmes qui vont suivre, nous allons faire quelques applications des principes précédens.

PROBLÈME 1^{er}.

25. *Déterminer la résistance du milieu contre un projectile de dimensions quelconques, se mouvant avec une des vitesses contenues dans la table du § 17.*

Les expériences, qui ont été amplement détaillées, prouvent suffisamment qu'à vitesses égales, la résistance augmente dans un plus grand rapport que la surface des corps. Néanmoins les rapports des résistances et ceux des surfaces, ou, ce qui revient au même, des carrés des diamètres, diffèrent si peu, qu'on peut généralement les considérer comme les mêmes, dans la plupart des calculs relatifs à l'Artillerie ou aux autres usages pratiques. Comparons, par exemple, les expériences faites avec les trois espèces de boulets de 2 pouces, 2,78 pouces et 3,55 pouces de diamètre; le tableau des résistances relatives à la première espèce de boulet se trouve à l'article 17 de ce Traité, ainsi qu'à l'article 145 du 34^e Traité, depuis la vitesse de 5 pieds jusqu'à la vitesse de 2000 pieds par seconde. Le tableau qui a rapport au deuxième boulet est placé dans l'article 167 de ce Traité, et depuis la vitesse de 900 jusqu'à celle de 1700 pieds par seconde; celui de la troisième espèce de boulet se trouve dans l'article 193 du même Traité, pour la vitesse de 1200 jusqu'à celle de 1800 pieds par seconde. Les trois diamètres étant 2, 2,78 et 3,55, leurs carrés sont proportionnels aux nombres 1, 1,931 et 3,13, qui sont aussi les rapports des trois surfaces. Maintenant, en prenant une des vitesses connues dans ces trois tables, celle, par exemple, de 1200 pieds par seconde, nous trouvons que les résistances correspondantes à cette vitesse sont 564,5, 1133 et 1840, nombres qui sont entre eux comme 1, 2,01 et 3,26, dont les deux derniers surpassent les nombres correspondans au rapport des surfaces, le premier, de sa 25^e partie, et le second, de sa 35^e partie. Si l'on compare de même les résistances pour une vitesse de 1700 pieds par seconde, qui sont 1228,4, 2472 et 4010, nous trouvons qu'elles sont entre elles comme 1 — 2,013 et 3,26, rapports qui sont à peu près les mêmes que les précédens. Ainsi il paraît, en général, que les résistances peuvent être considérées comme croissant dans un plus grand rapport que celui des surfaces, mais seulement d'un 30^e. Supposons qu'il s'agisse de déterminer, par exemple, quelle serait la résistance de l'air contre un boulet de 24 livres, lancé avec une vitesse de 2000 pieds par seconde. La table (art. 17) nous montre

qu'un boulet de 2 pouces de diamètre, qui se meut avec une vitesse de 2000 pieds par seconde, supporte une résistance de 1638 onc, ou 102 liv. Or, les résistances, à vitesses égales, sont à peu près comme les surfaces, et les surfaces sont comme les carrés des diamètres; donc les diamètres étant 2 et à peu près 5,6, dont les carrés sont 4 et 31,36, on aura.
 $4 : 31,36 :: 102^{\text{th}} : 800^{\text{th}}$ environ, c'est-à-dire qu'un boulet de 24 aura à vaincre la résistance énorme de 800th opposée à la direction de son mouvement. En général, si d représente le diamètre d'un boulet donné, et que r soit la résistance due à une vitesse déterminée pour un boulet de 2 pouces de diamètre, alors $\frac{1}{4}d^2r$ représentera la résistance due à la même vitesse, pour le boulet dont le diamètre est d .

PROBLÈME 2.

26. *Assigner une règle pour trouver la résistance due à une vitesse quelconque et pour un boulet donné.*

La solution exacte de ce problème présente de grandes difficultés, à cause du rapport variable des résistances comparées aux vitesses; celles-là augmentent continuellement, dans un rapport plus grand que celui du carré des vitesses, jusqu'à un certain terme. Ainsi il paraît qu'il n'y a aucune puissance entière de la vitesse, ou qu'il n'y a aucune expression de la vitesse composée d'un seul terme, qui puisse être proportionnelle aux résistances, quelles qu'elles soient. Il est vrai que le monome $\frac{v^{2,1}}{5700}$ reproduit assez exactement toutes les résistances. Mais cette formule, quoiqu'elle puisse très bien servir pour quelques cas particuliers, et même pour la construction d'une série complète ou d'une table de résistances, n'est pas propre à l'usage, dans les problèmes où il entrerait des expressions différentielles ou des intégrales, à cause du nombre fractionnaire 2,1, exposant de la vitesse v .

Il faut donc avoir recours à une expression à deux termes, ou à une formule contenant deux puissances entières de la vitesse, telles que v^2 et v , c'est-à-dire la première et la seconde puissance, multipliées par des coefficients indéterminés m et n , de manière que l'on ait $mv^2 + nv = r$ la résistance. Maintenant, pour déterminer la valeur numérique des coefficients m et n , nous allons substituer pour v , dans l'expression $mv^2 + nv = r$, deux vitesses particulières choisies à une distance convenable l'une de l'autre, dans une des tables précédentes, celle de l'art. 17 par exemple. Après avoir

fait plusieurs essais, on trouve que les deux vitesses 500 et 1000 répondent mieux à l'objet qu'on se propose. Faisant donc $v = 500$ et $r = 74,4$ onces, ou $4,65^{\text{lb}}$, qui est la résistance correspondante; ensuite $v = 1000$ et $r = 362$ onces, ou $22 \frac{5}{8}^{\text{lb}}$, on aura les deux équations suivantes pour déterminer les valeurs générales de m et de n ,

$$500^2 m + 500n = 4,65, \quad \text{et} \quad 1000^2 m + 1000n = 22,625;$$

divisant la première par 500 et la seconde par 1000, il vient

$$500m + n = 0,0093, \quad \text{et} \quad 1000m + n = 0,022625.$$

Retranchant la première équation de la seconde, on a $500.m = 0,013325$, d'où l'on tire $m = 0,0002665$; de là $n = 0,0093 - 50.m$, ou..... $n = 0,0093 - 0,013325 = -0,00665$; ainsi notre formule générale devient $0,0002665v^2 - 0,004025v = r$, où la résistance est exprimée en livres avoir-du-poids des vitesses quelconques.

27. Maintenant, pour savoir de combien nous approchons de la vérité, par la formule précédente, nous allons substituer successivement pour v les différentes vitesses 100, 200, 300, 400, etc. jusqu'à 2000, nous trouverons alors les valeurs correspondantes de r , qui sont placées dans la seconde colonne du tableau ci-contre, les vitesses étant dans la première colonne et les résistances réelles déduites de l'expérience étant dans la troisième colonne. En comparant les nombres de ces deux colonnes, on voit qu'il n'existe pas une grande différence entre eux, que les premiers sont tantôt un peu plus grands et tantôt un peu plus petits que les seconds, en sorte qu'au total ils se balancent et peuvent être employés dans les cas particuliers, depuis la plus petite

vitesse jusqu'à la plus grande, excepté pour les premiers nombres du commencement de cette table, qui se rapportent aux vitesses 100, 200, 300, pour les résistances desquelles, ainsi que pour les vitesses moindres, on se servira de

VITESSES, ou v .	RÉSISTANCES d'après la formule.	RÉSISTANCES d'après l'expérience.
100	- 0,133	0,174
200	+ 0,266	0,709
300	1,200	1,612
400	2,666	2,906
500	4,666	4,650
600	7,200	6,900
700	10,206	9,750
800	13,866	13,250
900	18,000	17,519
1000	22,666	22,625
1100	27,866	28,556
1200	33,266	35,275
1300	39,866	42,706
1400	46,666	50,719
1500	54,000	59,194
1600	61,866	67,931
1700	70,466	76,775
1800	79,200	85,537
1900	88,666	94,106
2000	98,666	102,362

la formule $0,0000176v^2 = r$, qui donnera pour ces trois résistances les nombres 0,176, 0,704 et 1,584, qui ne diffèrent des véritables que d'une très petite fraction.

Autre manière.

28. Toutefois si la formule $0,00002665v^2 - 0,004025v = r$, relative à un boulet de 2 pouces de diamètre, n'est pas assez exacte pour tous les cas, puisqu'elle s'écarte de la vérité d'environ $\frac{1}{11}$ dans le cas d'une vitesse de 1600 à 1700 pieds par seconde, nous pouvons trouver une formule plus exacte encore de la manière suivante. Pour cela, supposons la résistance proportionnelle à trois différentes puissances de la vitesse, savoir, une partie proportionnelle à v^2 , une autre à $v^{\frac{3}{2}}$, et une troisième à v ; chacune de ces puissances étant multipliée par un coefficient indéterminé. Posons donc

$xv^2 + yv^{\frac{3}{2}} + zv = r$, ou $(xv + y\sqrt{v} + z)v = r$: pour déterminer les valeurs de x , y , z , nous allons substituer pour v successivement trois vitesses quelconques prises dans la série précédente, par exemple, celles de 600, 1200 et 1800 pieds par seconde, et pour r les résistances correspondantes données par l'expérience; par ce moyen nous aurons une formule qui sera entièrement exacte pour les trois vitesses choisies, et qui diffèrera très peu de la vérité pour les autres vitesses intermédiaires. Or, les résistances correspondantes à ces vitesses sont 6,9, 35,275 et 85,537. Faisant les substitutions indiquées, on a les trois équations suivantes :

$$600^2x + 600^{\frac{3}{2}}y + 600z = 6,9,$$

$$1200^2x + 1200^{\frac{3}{2}}y + 1200z = 35,275,$$

$$1800^2x + 1800^{\frac{3}{2}}y + 1800z = 85,537;$$

divisant la première par 600, la seconde par 1200 et la troisième par 1800, on a

$$600x + y\sqrt{600} + z = 0,0115,$$

$$1200x + y\sqrt{1200} + z = 0,029396,$$

$$1800x + y\sqrt{1800} + z = 0,0475205.$$

Retranchant la première de la seconde, et la seconde de la troisième, il résulte

$$600x + (\sqrt{1200} - \sqrt{600})y = 0,017896,$$

$$600x + (\sqrt{1800} - \sqrt{1200})y = 0,0181245;$$

prenant la différence, il vient

$$(\sqrt{1800} - 2\sqrt{1200} + \sqrt{600})y = 0,0002285,$$

et en divisant par $\sqrt{600}$ il vient $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1})y = 0,00000933$; de là on tire

$$y = \frac{0,00000933}{\sqrt{3} - \sqrt{8} + 1} = \frac{0,00000933}{-0,6376} = -0,0000968,$$

valeur de y .

De là, $600x = 0,017896 - (\sqrt{1200} - \sqrt{600})y = 0,018878$; par conséquent,

$$x = \frac{0,018878}{600} = 0,000031463 \text{ et } z = 0,0115 - 600x - y\sqrt{600};$$

mettant pour x et y leurs valeurs, on trouve $z = -0,005007$; ces valeurs étant substituées dans la formule, elle devient

$$(0,00003146v - 0,0000968\sqrt{v} - 0,005)v = r,$$

$$\text{ou } (0,0000315v - 0,0001\sqrt{v} - 0,005)v = r;$$

elle est très exacte pour les vitesses 600, 1200 et 1800, et très rapprochée pour les autres.

29. Mais on s'aperçoit bientôt que le terme du milieu $0,0001\sqrt{v}$ peut être supprimé, et que par ce moyen la formule devient plus simple. Si l'on applique la formule à quelques vitesses prises dans les séries précédentes, on trouve que non-seulement le second et le troisième terme, c'est-à-dire $0,0001\sqrt{v}$ et $0,005v$, sont toujours très petits en comparaison du premier terme $0,00003146v$, mais que le second terme peut généralement être pris pour les $\frac{3}{5}$ du 3^e $0,005v$, ou que sa valeur moyenne est égale à $0,003$, par conséquent la somme de ces deux termes sera égale à $0,008$; et la formule devient

$$(0,00003146v - 0,008)v = r.$$

30. En calculant maintenant par cette formule toutes les résistances ou les valeurs de r , on trouve qu'elles approchent plus de l'exactitude que ce qui donnerait la formule $(0,00002665v^2 - 0,004)v = r$; mais les différences entre les résultats de ces deux formules et les véritables

résistances, suivent une marche inverse, c'est-à-dire que les premiers sont trop petits presque pour toutes les vitesses où les seconds sont trop grands. Cette circonstance nous conduit naturellement à prendre une moyenne arithmétique entre les deux pour avoir une formule plus approchée : or la moitié de la somme de

et
est
ou par approximation

$$\begin{aligned} (0,00002665v^2 - 0,004)v &= r, \\ (0,00003146v^2 - 0,008)v &= r, \\ (0,00002906v^2 - 0,006)v &= r, \\ (0,0000291v^2 - 0,006)v &= r, \end{aligned}$$

pour un projectile dont le diamètre est de 2 pouces, et par conséquent pour un autre projectile dont le diamètre est d , la résistance sera exprimée par l'équation

$$(0,0000073v^2 - 0,0015)vd^2 = r \quad (1).$$

31. En calculant maintenant, par les formules précédentes, les résistances pour toutes les vitesses, on obtient le tableau suivant :

VITESSES.	VÉRITABLE résistance d'après l'expérience.	RÉSISTANCES D'APRÈS LES FORMULES				
		$0,00002665v^2 - 0,004v$	$0,00003146v^2 - 0,008v$	$0,00002906v^2 - 0,006v$	$0,00003026v^2 - 0,007v$	$0,00003028v^2 - 0,007\frac{1}{2}v + 0,3$
pieds.	lb	lb	lb	lb	lb	lb
100	0,17	— 0,13	— 0,48	— 0,31	— 0,39	— 0,11
200	0,71	+ 0,27	— 0,34	— 0,04	— 0,19	+ 0,08
300	1,61	1,20	+ 0,43	+ 0,82	+ 0,63	0,88
400	2,91	2,67	1,83	2,26	2,05	2,29
500	4,65	4,67	3,87	4,28	4,08	4,29
600	6,90	7,20	6,53	6,87	6,70	6,90
700	9,75	10,21	9,82	10,06	9,94	10,12
800	13,25	13,82	13,73	13,82	13,77	13,95
900	17,52	18,00	18,28	18,17	18,22	18,38
1000	22,63	22,67	23,46	23,11	23,28	23,41
1100	28,56	27,87	29,27	28,61	28,94	29,06
1200	35,28	33,27	35,70	34,70	35,20	35,30
1300	42,71	39,87	42,77	41,38	42,08	42,15
1400	50,72	46,67	50,46	48,64	49,55	49,62
1500	59,19	54,00	58,79	56,48	57,64	57,69
1600	67,93	61,87	67,74	64,90	66,32	66,36
1700	76,78	70,47	77,32	73,90	75,61	75,63
1800	85,54	79,20	87,53	83,48	85,50	85,52
1900	94,11	88,67	98,37	93,65	96,01	95,99
2000	102,36	98,67	109,85	104,00	106,92	107,09
1	2	3	4	5	6	7

(1) En divisant les coefficients précédens par 4.

La première colonne contient la série des vitesses, la seconde les résistances véritables ou trouvées par l'expérience, la troisième renferme les résistances calculées par la formule $0,00002665v^2 - 0,004v$, ou $(0,02665v - 4) \times 0,001v = r$, où nous voyons que les nombres approchent beaucoup des vraies résistances, jusqu'à la vitesse de 1100 pieds; après ce terme, l'erreur devient de plus en plus grande, et elle est de 7 sur 77, ou de la onzième partie, et s'écarte encore plus de la vérité pour les vitesses plus élevées. La quatrième colonne contient les résistances calculées par la formule $0,00003146v^2 - 0,008v$ ou $(0,03146v - 8) \times 0,001v = r$. Elles donnent les résistances très approchées jusqu'à la vitesse de 1700 pieds, après quoi les résultats sont trop grands; car pour 1800, l'excès est de 2 ou de la 43^e partie; pour la vitesse de 1900, l'excès est 4 ou de la 24^e partie, et pour 2000 il est de 7 ou de la 15^e partie. La cinquième colonne renferme les résistances calculées par la formule $0,00002906v^2 - 0,006v$ ou $(0,02906v - 6) \times 0,001v = r$, qui est la moyenne entre les deux précédentes; elle donne des résultats beaucoup plus rapprochés que les premières, puisque la plus grande erreur en moins n'est que de 3 à 4 unités, ou du 20^e, à la vitesse de 1700 pieds. La sixième colonne contient les résistances que donne la formule $0,00003026v^2 - 0,007v$ ou $(0,03026v - 7) \times 0,001v = r$, qui est aussi la moyenne entre les deux précédentes. Elle peut être considérée comme suffisamment exacte, puisqu'elle ne varie que de 2 à 3 unités pour les dernières vitesses.

Il faut toujours se rappeler que, pour les trois ou quatre premières vitesses, la formule $0,0000176v^2$ donnera toujours les valeurs les plus approchées des véritables résistances.

32. Enfin, on peut employer une autre formule pour avoir des résultats plus approchés des véritables résistances, et cela au moyen de la formule $xv^2 + yv + z = r$ qui contient la carré de la vitesse, sa première puissance et une quantité constante. Si l'on met maintenant pour v successivement les vitesses 600, 1200 et 1800, et pour r les résistances correspondantes, on obtiendra les valeurs suivantes pour les coefficients x, y, z : $x = 0,00003028$, $y = -0,00716$ et $z = 0,3$; la formule devient alors $0,00003028v^2 - 0,007\frac{1}{6}v + 0,3$. Les résistances calculées par cette formule, placées dans la septième ou dernière colonne, sont plus exactes que toutes les autres; elles ne sont qu'un peu trop faibles pour les trois premières vitesses et qu'un peu trop fortes pour les deux ou trois der-

nières; car la plupart des formules donnant les trois derniers nombres plus grands que ceux des expériences, on peut présumer que ces derniers sont en effet un peu trop petits, et que probablement ils doivent être environ 95 et 104.

33. *Corollaire 1.* La formule précédente $0,00003026 v^2 - 0,007 v = r$, dont les résultats sont placés dans la sixième colonne, donne les résistances pour un boulet dont le diamètre est 2 pouces; pour l'adapter à un boulet dont le diamètre est d' , il faut, pour avoir la valeur r , multiplier le premier nombre de l'équation ci-dessus par $\frac{d'^2}{4}$, et l'on obtient $r = \frac{1}{4}(0,00003026 v^2 - 0,007 v) d'^2$, ou $(0,00000756 v^2 - 0,00175 v) d'^2$, pour la résistance d'un boulet dont le diamètre est d et qui est animé d'une vitesse v .

34. *Corollaire 2.* Il en est de même pour la formule $0,0000176 v^2$ qui convient aux petites vitesses et au boulet de 2; il faut, pour l'adapter à un autre boulet, multiplier par $\frac{1}{4} d'^2$, et l'on a $0,0000044 d'^2 v^2 = r$.

Nous aurons bientôt occasion de faire quelques applications des formules précédentes, quand nous aurons examiné l'effet de ces vitesses dans le cas où l'air n'oppose point de résistance.

PROBLÈME 3.

35. *Déterminer la hauteur à laquelle s'élève un projectile lancé verticalement d'une pièce de canon, avec une vitesse donnée, et faisant abstraction de la résistance de l'air.*

On sait qu'un corps projeté verticalement, avec une vitesse donnée, monte à une hauteur due à cette vitesse, ou à la hauteur d'où le corps devrait tomber naturellement pour acquérir la vitesse de projection, et que les espaces parcourus sont comme les carrés des vitesses; par conséquent 16 pieds étant l'espace dû à une vitesse de 32 pieds, on trouvera l'espace dû à une vitesse donnée v par la proportion $32^2 : 16 :: v^2 : s =$ l'espace, ou $64 : 1 :: v^2 : \frac{1}{64} v^2 = s$, l'espace ou la hauteur à laquelle la vitesse v élèvera le corps, en supposant nulle la résistance de l'air.

Exemple. Supposons que la vitesse de projection soit de 2000 pieds (1) par seconde, ce qui est à peu près la plus grande vitesse que nous ayons rencontrée dans nos expériences; $\frac{1}{64} v^2$ devient $\frac{1}{64} \times 2000^2 = 62500$ pieds $= 11 \frac{5}{6}$ milles : c'est-à-dire qu'un corps lancé avec une vi-

(1) Environ 609,6 mètres, ou 1874 pieds.

tesse de 2000 pieds par seconde s'élèverait à une hauteur de $11 \frac{5}{6}$ milles (1), sans la résistance de l'air.

36. *Corollaire 3.* Dans le vide, la plus grande amplitude étant précisément double de la hauteur due à la vitesse de projection, il s'ensuit que, pour un angle d'élévation de 45 degrés, et une vitesse égale à celle de l'exemple précédent, l'amplitude sera de $23 \frac{2}{3}$ milles.

PROBLÈME 4.

37. *Déterminer la hauteur à laquelle s'élève un boulet lancé verticalement, comme dans le dernier problème, mais en ayant égard à la résistance de l'air.*

Soit x la hauteur variable et croissante à laquelle le boulet s'élève ; v sa vitesse variable et décroissante ; d' le diamètre du boulet, et w son poids ; $m = 0,00000757$, et $n = 0,00175$, m et n étant les coefficients des deux termes qui entrent dans la loi de la résistance de l'air. Alors, d'après le premier corollaire du deuxième problème $(mv^2 - nv)d'$, sera la résistance que l'air oppose au boulet, exprimée en livres (avoir-du-poids) ; il faut ajouter le poids w du boulet, ce qui donne $(mv^2 - nv)d' + w$ pour la résistance totale qui s'oppose au mouvement du projectile : divisant par w , on a

$$\frac{(mv^2 - nv)d' + w}{w} = f,$$

force retardatrice ; de là, la formule $v dv = 2g f dx$ devient

$$-v dv = 2g dx \times \frac{(mv^2 - nv)d' + w}{w}.$$

On donne au premier nombre le signe moins, parce que dv diminue quand dx augmente. De cette équation, on tire

$$dx = -\frac{w}{2g} \times \frac{v dv}{(mv^2 - nv)d' + w} = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \frac{v dv}{v^2 - \frac{n}{m}v + \frac{w}{md'^2}}.$$

Maintenant, pour intégrer plus facilement, nous poserons $v - \frac{n}{2m} = z$, d'où $v = z + \frac{n}{2m}$, et $v^2 = z^2 + \frac{n}{m}z + \frac{n^2}{4m^2}$, et $v dv = z dz + \frac{n}{2m} dz$; en-

(1) Environ 19 kilomètres, ou 9750 toises.

suite $v^2 - \frac{n}{m}v + \frac{n^2}{4m^2} = z^2$ et $v^2 - \frac{n}{m}v = z^2 - \frac{n^2}{4m^2}$; ces valeurs étant substituées dans celle de dx , elle devient

$$dx = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \frac{zdz + \frac{m}{2md'^2}}{z^2 - \frac{n^2}{4m^2} + \frac{w}{md'^2}} = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \frac{zdz + pdz}{z^2 + \frac{w}{md'^2} - p^2} = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \frac{zdz + pdz}{z^2 + q^2},$$

en faisant

$$p = \frac{n}{2m} \text{ et } q^2 = \frac{w}{md'^2} - p^2, \text{ d'où } p^2 + q^2 = \frac{w}{md'^2}.$$

En intégrant maintenant, il vient

$$x = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \frac{1}{2} \left[\log(z^2 + q^2) + \frac{p}{q^2} \text{arc}(\text{tang} = z) \text{ le rayon} = q \right] + c$$

$$= -\frac{w}{2gmd'^2} \times \frac{1}{2} \left[\log\left(v^2 - \frac{n}{m}v + \frac{w}{md'^2}\right) + \frac{p}{q^2} \text{arc}(\text{tang} = v - p) \text{ ray.} = q \right] + c.$$

Or au commencement du mouvement on a $x = 0$, et $v = V$, V étant la vitesse initiale; faisant ces substitutions dans la valeur de x , on a

$$0 = -\frac{w}{2gmd'^2} \times \frac{1}{2} \left[\log h\left(V^2 - \frac{n}{m}V + \frac{w}{md'^2}\right) + \frac{p}{q^2} \text{arc}(\text{tang} = V - p) \text{ ray.} = q \right] + c.$$

Retranchant cette équation de la première, et faisant ensuite $v = 0$, ce qui correspond à la fin du mouvement, il viendra pour la hauteur cherchée

$$x = \frac{w}{2gmd'^2} \times \left[\frac{1}{2} \log\left(V^2 - \frac{n}{m}V + \frac{w}{md'^2}\right) - \frac{1}{2} \log \frac{w}{md'^2} + \frac{p}{q^2} \times \text{arc}(\text{tang} = V - p) \right. \\ \left. - \text{arc}(\text{tang} = p) \right],$$

le rayon étant égal à q .

Mais la dernière partie de cette intégrale est toujours très petite en comparaison du terme précédent, et peut être négligée sans erreur sensible, et alors on a

$$x = \frac{w}{4gmd'^2} \times \log \frac{V^2 - \frac{n}{m}V + \frac{w}{md'^2}}{\frac{w}{md'^2}},$$

pour la plus grande hauteur à laquelle le boulet s'élèvera.

38. Maintenant cherchons la valeur du coefficient général $\frac{w}{4gmd'^2}$ et du terme $\frac{w}{md'^2}$, puisque le volume d'un boulet dont le diamètre est d' , est représenté par $0,5236d'^3$; si l'on appelle s sa pesanteur spécifique, son poids sera $= 0,5236sd'^3 = w$ (1), donc $\frac{w}{d'^2} = 0,5236sd'$, et $\frac{w}{md'^2} = 69259sd'$: en divisant par 49 ou 64, on aura $\frac{w}{4gmd'^2} = 1082sd'$ pour la valeur du coefficient. Si l'on suppose de plus que le boulet soit de fer fondu, dont la pesanteur spécifique ou le poids d'un pouce cube $= 0,26855$ livre, la valeur ci-dessus de $\frac{w}{4gmd'^2}$ devient $290,6d'$; de même $\frac{w}{md'^2} = 69259sd' = 18600d'$, et $\frac{n}{m} = 231,5$: l'intégrale précédente devient alors $290,5d' \times \log \frac{V^2 - 231,5V + 18600d'}{18600d'}$, ou, en changeant les logarithmes hyperboliques en logarithmes ordinaires, $669,4d' \times \log \frac{V^2 - 231,5V + 18600d'}{18600d'}$. Telle est l'expression générale de la hauteur exprimée en pieds à laquelle s'élèvera un boulet de fer dont le diamètre est d' , et qui est lancé avec une vitesse V . En sorte qu'en substituant pour V et d' des valeurs particulières, on aura la hauteur à laquelle le projectile s'élèvera pour chacun de ces cas.

39. *Exemple 1.* Supposons que le boulet soit celui auquel se rapporte le dernier tableau des résistances, celui dont le poids est 18 onces ou $1\frac{1}{8}$, et dont le diamètre est de 2 pouces, et qui est lancé avec une vitesse de 2000 pieds par seconde. Le calcul fait avec ces valeurs de d' et de V , on trouve que la hauteur est de 2653 pieds, ou environ un demi-mille, tandis que faisant abstraction de la résistance de l'air, on trouve que cette hauteur est au moins de 12 milles.

40. *Exemple 2.* Supposons un boulet de 24th animé de la même vitesse de 2000 pieds par seconde, son diamètre étant environ $5,6 = d'$, alors $669d' = 3746$, et $\frac{V^2 - 231,5V + 18600d'}{18600d'} = \frac{36416}{10416}$ dont le logarithme est 1,54354; ainsi $1,54354 \times 3746 = 5782 = x$ la hauteur, ce qui est environ un mille.

Nous allons maintenant examiner à quelle hauteur s'élèverait le boulet, en supposant la résistance seulement proportionnelle au carré de la vitesse.

(1) Pour plus d'exactitude, il faudrait prendre w égal au poids du boulet dans l'air: la différence est peu considérable.

PROBLÈME 5.

41. Déterminer la hauteur à laquelle s'élèvera un boulet projeté, comme dans les deux exemples précédens, en supposant que la résistance de l'air soit proportionnelle au carré de la vitesse.

Il est convenable de commencer d'abord par choisir une résistance trouvée par expérience et correspondante à une sorte de vitesse moyenne entre la plus grande et la plus petite, et d'en conclure de là toutes les résistances, en les considérant comme proportionnelles au carré des vitesses. Je dis qu'il est convenable de prendre une vitesse moyenne approchée et sa résistance, parce que si nous adoptons pour point de départ la plus grande vitesse ou celle de projection avec sa résistance, et si nous voulons en conclure toutes les résistances qui répondent à des vitesses au-dessous de la plus grande, ces résistances seront toujours trop grandes, et la hauteur cherchée sera par conséquent trop faible. Si au contraire nous prenons une petite résistance pour calculer par son moyen celles qui sont au-dessus, elles seront toujours trop petites, et la hauteur cherchée sera trop forte. Mais en partant d'une vitesse moyenne, par exemple, de celle qui correspond environ à la moitié de la première ou plus grande résistance, alors toutes les résistances calculées au-dessus de celles-ci seront trop petites, et toutes celles au-dessous seront trop grandes. Il arrivera donc par là que le déficit d'un côté sera compensé par l'excès de l'autre, et qu'en somme on se sera approché davantage de la vérité.

42. Ainsi donc, si nous voulons déterminer par ce moyen la hauteur à laquelle s'élèvera un boulet du calibre de 2 pouces, projeté avec une vitesse de 2000 pieds par seconde, nous voyons, par la table § 31, qu'à la vitesse de 2000 pieds par seconde correspond une résistance de 102^{lb}, dont la moitié est 51; à cette dernière résistance correspond une vitesse de 1400 pieds, la vitesse immédiatement au-dessus 1500 pieds, et sa résistance 59, sera celle qu'il conviendra d'employer ici. Ainsi, par une autre vitesse V en général, la résistance, d'après la loi du carré des vitesses, se trouvera par la proportion $1500^2 : v^2 :: 59 : \frac{59v^2}{1500^2} = 0,000026 \frac{2}{9} v^2 = av^2$ en faisant $0,000026 \frac{2}{9} = a$, et cette formule donnera la résistance de l'air pour une vitesse v , depuis 2000 pieds jusqu'à zéro.

43. Soit maintenant x la hauteur parcourue avec la vitesses v ; w , le poids du boulet, alors comme ci-dessus av^2 sera la résistance de l'air, et $av^2 + w$ la force totale de résistance, donc $\frac{av^2 + w}{w} = f$ la force retardatrice, et par conséquent

$$-v dv = 2g f dx = \frac{av^2 + w}{w} \times 2g dx,$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{-w}{2g} \times \frac{v dv}{av^2 + w} = \frac{-w}{2ga} \times \frac{v dv}{v^2 + \frac{w}{a}},$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{-w}{4ag} \times \log \left(v^2 + \frac{w}{a} \right) + c,$$

en faisant $x = 0$, et $v = V$, V désignant la vitesse initiale, on a

$$0 = \frac{-w}{4ag} \log \left(V^2 + \frac{w}{a} \right) + c;$$

retranchant cette équation de la première, il vient

$$x = \frac{w}{4ag} \log \left[\frac{aV^2 + w}{av^2 + w} \right].$$

Si l'on fait maintenant $v = 0$ pour avoir la hauteur totale, on aura

$$x = \frac{w}{4ag} \times \log \text{hyp.} \left(\frac{aV^2 + w}{w} \right).$$

44. *Exemple 1.* Soient $w = 1 \frac{1}{8} \text{ lb}$ $4g = 64$, $a = 0,000026 \frac{2}{9}$, la dernière expression devient $670 \times \log \text{hyp.} \frac{V^2 + 42880}{42880}$, ou $1484 \times \log \frac{V^2 + 42880}{42880}$; et en supposant que la vitesse initiale soit de 2000 pieds par seconde, cette expression se change en $1484 \times \log 94,28 = 2930$: telle est la hauteur totale dans cette hypothèse; dans le problème précédent, elle était de 2653 pieds.

45. *Exemple 2.* Supposons le même boulet projeté avec une vitesse de 1500 pieds: prenant alors la vitesse 1100, dont la résistance est 28,6, environ la moitié de celle qui correspond à la vitesse 1,500, nous aurons $1100^2 : v^2 :: 28,6 : 0,00002364 v^2 = av^2$. Substituant dans la formule $\frac{w}{4ga} \times \log \text{hyp.} \frac{av^2 + w}{w}$, la valeur trouvée pour a , 1500 pour V et $1 \frac{1}{8}$ pour w , il vient $x = 2882$.

46. *Exemple 3.* Soit le boulet projeté avec une vitesse de 820 pieds. Ici nous prendrons la vitesse 600, dont la résistance est 6,90; alors $600 : 6,90 :: 1 : 0,000019 \frac{1}{6} = a$, par conséquent $\frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.} \frac{aV^2 + w}{w} = 1802$ pour hauteur dans cette supposition.

47. *Exemple 4.* Pour le même boulet et une vitesse de 1640 pieds. Nous prendrons la vitesse 1200, à laquelle correspond la résistance 32,275, alors $1200^2 : 32,275 :: 1 : 0,0000245 = a$; d'où $\frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.} \frac{aV^2 + w}{w} = 2500$ pieds, qui est la hauteur cherchée.

48. *Exemple 5.* Pour un autre boulet dont le diamètre est d' et le poids w , la résistance de l'air sera $\frac{ad'^2v^2}{4} = \frac{d'^2v^2}{152542} = bd'^2v^2$, en faisant $b = \frac{1}{152542}$; la force retardatrice sera donc $\frac{bd'^2v^2 + w}{w}$; donc $-v dv = 2g dx \times \frac{bd'^2v^2 + w}{w}$, et $dx = \frac{-w}{2g} \times \frac{v dv}{bd'^2v^2 + w}$. En intégrant et désignant par V la vitesse initiale, on a $x = \frac{w}{4gbd'^2} \times \log \text{hyp.} \frac{bd'^2V^2 + w}{bd'^2v^2 + w}$, et en faisant $v = 0$, pour avoir la hauteur totale, on a

$$x = \frac{w}{4gbd'^2} \times \log \text{hyp.} \frac{bd'^2V^2 + w}{w}.$$

Si maintenant le boulet est de 24 livres, dont le diamètre est à peu près 5,6, et le carré 31,36, alors $bd'^2 = 0,00020714$, et $\frac{w}{4gbd'^2} = \frac{24}{64bd'^2} = \frac{3}{8bd'^2} = 1810$. De même $V = 2000$ donne $bd'^2V^2 = 829$ et $\frac{bd'^2V^2 + w}{w} = \frac{829 + 24}{24} = \frac{853}{24}$. Donc $x = 1810 \times \log \text{hyp.} \frac{853}{24} = 1810 \times 3,57071 = 6463$, hauteur de plus d'un mille, et qui surpasse le double de la hauteur à laquelle s'élève le boulet de $1 \frac{1}{8}$ dans l'exemple 1, et à peu près la même que celle du second exemple du 4^e problème.

PROBLÈME 6.

49. *Trouver le temps qu'un boulet emploiera pour s'élever à la hauteur déterminée dans le dernier problème, avec la même vitesse de projection.*

$$\text{On a } dx = \frac{w}{2ga} \times \frac{v dv}{v^2 + \frac{w}{a}}; \text{ donc } dt = \frac{dx}{v} = \frac{w}{2ga} \times \frac{dv}{v^2 + \frac{w}{a}},$$

dont l'intégrale est

$$t = -\frac{w}{2ga} \sqrt{\frac{a}{w}} \times \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2g} \sqrt{\frac{w}{a}} \times \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right) + c,$$

le rayon étant égal à 1; quand $t = 0$, $v = V$ vitesse initiale; donc

$$0 = -\frac{1}{2g} \sqrt{\frac{w}{a}} \times \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right) + c;$$

retranchant cette équation de la première, on a

$$t = \frac{1}{2g} \sqrt{\frac{w}{a}} \times \left[\arctan\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right) - \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right) \right];$$

faisant $v = 0$ pour avoir le temps total, il vient

$$t = \frac{1}{2g} \sqrt{\frac{w}{a}} \times \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right),$$

ou $\frac{1}{2g} \times \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{w}{a}}}\right)$, et dont le rayon est $\sqrt{\frac{w}{a}}$.

50. Mais $\frac{1}{2g} \times V$, ou $\frac{V}{2g}$, désigne tout le temps qu'un corps emploie pour s'élever à sa plus grande hauteur dans le vide, en le supposant projeté avec la vitesse V ; donc le temps du trajet ascendant dans le vide est à celui du même trajet dans l'atmosphère, la vitesse initiale étant la même, comme V est à la longueur de l'arc dont la tangente est égale à V , et dont le rayon est $\sqrt{\frac{w}{a}}$.

51. Soit, comme dans le dernier problème (1^{er} exemple), $V = 2000$, $w = 1 \frac{1}{8}$, $a = 0,000026 \frac{2}{9} = \frac{236}{9000000}$, d'où $\frac{w}{a} = 42900$, et $\sqrt{\frac{w}{a}} = 207$, et $\frac{V}{\sqrt{\frac{w}{a}}} = 9,66184$, tangente à laquelle correspond un arc de $84^{\circ} 6'$, dont la longueur est 1,4678; donc

$$\frac{1}{2g} \times 207 \times 1,4678 = \frac{207 \times 1,4678}{32} = 9'',5$$

sera le temps cherché.

52. *Corollaire 1^{er}*. Le temps de l'ascension dans le vide, jusqu'à ce que la vitesse soit épuisée, la vitesse initiale étant de 2000 pieds, serait $1' 2''\frac{1}{2}$, qui est à $9''\frac{1}{2}$, temps trouvé ci-dessus pour l'élévation dans l'atmosphère, comme 9,6618, tangente de $84^\circ 6'$, est à 1,4678, longueur de cet arc; mais le temps de l'élévation dans le vide, à une hauteur de 2930 pieds, serait seulement $1''\frac{1}{2}$, la vitesse initiale étant 2000 pieds par seconde.

53. *Corollaire 2*. La durée de l'ascension dans l'air est en général égale à

$$\frac{1}{2g} \sqrt{\frac{w}{a}} \times \text{arc tang} = V \times \sqrt{\frac{a}{w}} \text{ le rayon} = 1.$$

Cette durée est un maximum, quand V est infini, ou quand $\text{arc tang} = V =$ un quadrant. Elle sera à peu près $\frac{1}{2g} \sqrt{\frac{w}{a}} \times$ le quart de cercle dont le rayon $= 1$; c'est-à-dire $\frac{\pi}{4g} \sqrt{\frac{w}{a}}$, où π exprime la longueur de la circonférence du cercle dont le diamètre $= 1$.

Maintenant si $a = 0,000026 \frac{2}{9}$, $\pi = 3,1416$, $4g = 64$, $\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{w}{a}}$ devient $9,6 \sqrt{w}$; dans la supposition que $w = 1 \frac{1}{8}$, ou $\sqrt{w} = 1,06$, le temps $9,6 \sqrt{w}$ est 10,176 secondes.

54. *Corollaire 3*. Pour une autre espèce de boulet dont le diamètre, au lieu d'être 2 pouces, serait en général représenté par d , il faudra, dans le théorème précédent, remplacer a par $\frac{1}{4}d^2a$, et dans ce cas général, l'expression du temps devient

$$\frac{2}{d} \times \frac{c}{4g} \sqrt{\frac{w}{a}} = \frac{2}{d} \times 9,6 \sqrt{w} = \frac{19,2}{d} \sqrt{w}.$$

Or le poids w du boulet étant proportionnel à d^3 , cube du diamètre, il s'ensuit que $\frac{\sqrt{w}}{d}$ est comme $\frac{\sqrt{d^3}}{d}$, ou comme $\sqrt{d}$; c'est-à-dire que les temps d'ascension pour les boulets de diamètres différens sont entre eux comme les racines carrées des diamètres. Ainsi pour un boulet de 24, le

diamètre étant à peu près 5,6, le rapport des temps devient

$$\sqrt{2} : \sqrt{5,6}, \text{ ou } 1 : \sqrt{2,8} = 1,6733;$$

donc $1,6733 \times 10,176 = 17$ secondes est le temps qu'un boulet de 24 met à monter lorsqu'il est projeté avec une vitesse infinie.

PROBLÈME 7.

55. Déterminer le temps que met un boulet lancé verticalement à s'élever à sa plus grande hauteur, en se servant de la même formule de la résistance de l'air que dans le quatrième problème.

Dans ce problème nous avons trouvé

$$dx = -\frac{w}{2g} \times \frac{v dv}{(mv^2 - nv)d'^2 + w} = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \frac{(z+p)dz}{z^2 + q^2};$$

divisant par v ou $z+p$, on a

$$\frac{dx}{v} = dt = \frac{w}{2gmd'^2} \times \frac{dz}{z^2 + q^2},$$

dont l'intégrale est $t = \frac{-w}{2gmd'^2} \times \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{z}{q} \right)$, etc., dont le rayon $= 1$; faisant $t=0$, $v=V$ pour déterminer la constante, il vient

$$t = \frac{w}{2gmd'^2} \times \left[\text{arc} \left(\text{tang} = \frac{V-p}{q} \right) - \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{v-p}{q} \right) \right].$$

Mais quand la vitesse initiale V est très grande, l'arc dont la tangente $= \frac{v-p}{q}$ peut être négligé, comme étant très petit, puisque la valeur de p est de $115\frac{1}{2}$, et quand la vitesse v est de 100 ou 200 pieds, la résistance calculée par la formule $0,00003026v^2 - 0,007v$, dont nous nous servons ici, est une quantité négative extrêmement petite; en omettant donc ce dernier arc, il reste seulement $\frac{w}{2gmd'^2} \times \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{V-p}{q} \right)$.

56. Exemple 1. Prenons le boulet de $1\frac{1}{8}$ ^{lb}, dont le diamètre est 2 pouces, et qui ait une vitesse de 2000 pieds; soit donc $w = 1\frac{1}{8}$, ou 1,125, $d' = 2$, $V = 2000$; de même, $m = 0,00000757$, $n = 0,00175$; alors $\frac{n}{m} = 231$, $\frac{n}{2m} = 115\frac{1}{2} = p$, $\frac{w}{md'^2} = 37153 = p^2 + q^2$, et $q = \sqrt{37153 - p^2} = 154\frac{1}{3}$;

par conséquent, $\frac{w}{2gmd^2} = 7522$; ainsi $\frac{V-p}{q} = 12,21$, tangente qui répond à l'arc $85^\circ 19'$, dont la longueur est $1,4890$. Donc $7,522 \times 1,489 = 11,199''$, durée de l'ascension; et si la vitesse V est infinie, alors $\text{tang} \frac{V-p}{q}$ l'est également, et l'arc est égal à un quadrant dont la longueur est $1,570$; donc, $7,522 \times 1,570 = 11,81''$ sera le temps de l'élévation quand la vitesse est infinie.

57. *Exemple 2.* Pour un boulet de $24 = w$, dont le diamètre $d = 5,546$, on a

$$d^2 = 30,758, \quad \frac{w}{d^2} = 0,78029, \quad \frac{w}{md^2} = 103078 = p^2 + q^2, \quad p = 115\frac{1}{2},$$

comme ci-dessus,

$$q = \sqrt{103078 - p^2} = 299,4, \quad \frac{w}{2gmd^2} = \frac{p^2 + q^2}{2gp} = 10,76.$$

Si la vitesse $V = 2000$, alors $\text{tang} \frac{V-p}{q} = 6,293$, qui répond à un angle de $80^\circ 56'$, dont la longueur est $1,413$; par conséquent, $10,76 \times 1,413 = 15,20$ est le temps de l'élévation du boulet projeté avec une vitesse de 2000 pieds par seconde. Et de même $10,76 \times 1,70 = 18,29$ est le temps de la plus grande élévation du boulet, quand il est projeté avec une vitesse infinie.

PROBLÈME 8.

58. *Déterminer la hauteur de l'ascension comme dans le cinquième problème, mais en ayant égard au décroissement de la densité de l'air.*

Dans les problèmes précédens concernant la hauteur et le temps de l'ascension des boulets dans l'atmosphère, nous avons négligé le décroissement de la densité de l'air et nous avons supposé que toutes les couches de l'atmosphère parcouru par le boulet avaient constamment la même densité qu'à la surface de la terre. Néanmoins il est certain que la densité de l'atmosphère doit décroître et décroît en effet très rapidement, quand on s'élève au-dessus de la surface de la terre, tellement que le décroissement augmente dans une progression géométrique lorsque les hauteurs suivent une progression arithmétique, et par conséquent les hauteurs sont

proportionnelles seulement aux logarithmes du décroissement de la densité. Il suit de là que les boulets doivent éprouver une résistance de plus en plus petite, et qu'ils doivent s'élever à une plus grande hauteur que si la densité était constante. Il faut donc examiner maintenant la différence qui naît de cette circonstance.

59. Or la nature et la mesure de ce décroissement de densité de l'atmosphère ont déjà été déterminées dans la 76^e proposition du deuxième volume de mon Cours, page 244. Nous y avons vu que si D désigne la densité de l'air à la surface de la terre, et d la densité à une hauteur a ou x , on a....
 $x = 63551 \times \log \frac{D}{d}$ en pieds, quand la température est de 55° Fah. Nous pouvons prendre pour valeur moyenne $x = 63500 \log \frac{D}{d}$.

60. Mais pour exprimer la densité en fonctions x débarrassée de logarithmes, sans quoi on ne pourrait pas l'introduire dans la mesure de la résistance sous une forme convenable, nous trouvons d'abord, par une formule ingénieuse, découverte par M. Halley et expliquée dans notre Introduction aux logarithmes, page 110, que $\frac{n - \frac{1}{2}l}{n + \frac{1}{2}l} \times D$ environ, est le nombre qui répond au logarithme l du rapport $\frac{D}{d}$, n désignant le module des logarithmes ordinaires, ou 0,43429448, etc. (1). Mais nous avons plus haut $x = 63500 \times \log \frac{D}{d}$, ou bien $\frac{x}{63500}$ est le logarithme de $\frac{D}{d}$, qui est désigné par l dans l'expression ci-dessus. Substituant donc $\frac{x}{63500}$ pour l dans $\frac{n - \frac{1}{2}l}{n + \frac{1}{2}l} D$, on aura

$$\frac{n - \frac{x}{12700}}{n + \frac{x}{12700}} \times D = d, \quad \text{ou} \quad \frac{12700n - x}{12700n + x} = d,$$

en faisant la densité à la surface de la terre = 1. Maintenant, si

$$(1) \text{ On a } \frac{n + \frac{1}{2} \log \frac{D}{d}}{n - \frac{1}{2} \log \frac{D}{d}} = 1 + \frac{\log \frac{D}{d}}{n} + \frac{\left(\log \frac{D}{d}\right)^2}{2n^2} + \text{etc.} = \frac{D}{d} \text{ à peu près, lors-}$$

que $\log \frac{D}{d}$ est une petite fraction, ce qui a lieu lorsque D ne diffère pas beaucoup de d , ainsi que cela a lieu dans le cas actuel.

l'on pose 127000 ou 55000 = c , alors $\frac{c-x}{c+x}$ représentera la densité de l'air à une hauteur variable x .

61. Dans le cinquième problème, on voit que av^2 désigne la résistance de l'air pour la vitesse v ou la hauteur x , dans la supposition que la densité est partout la même qu'à la surface de la terre; cette résistance est trop grande dans le rapport de $c+x$ à $c-x$, ainsi $av^2 \times \frac{c-x}{c+x}$ sera la résistance pour la hauteur x , a étant 0,000026 $\frac{2}{9}$; et ajoutant w le poids du boulet, la résistance totale sera $av^2 \times \frac{c-x}{c+x} + w$, par conséquent.....
 $\frac{av^2}{w} \times \frac{c-x}{c+x} + \frac{w}{w}$ représentera la force accélératrice, ou si nous renfermons $\frac{w}{w}$ ou 1 dans le facteur $\frac{c-x}{c+x}$, ce qui n'aura qu'une influence peu sensible sur le résultat, et facilitera beaucoup le calcul, on aura

$$\frac{av^2 + w}{w} \times \frac{c-x}{c+x} = f, \text{ la force accélératrice;}$$

donc

$$-v dv = 2g f dx = 2g dx \times \frac{c-x}{c+x} \times \frac{av^2 + w}{w},$$

d'où

$$\frac{c-x}{c+x} dx = \frac{w}{2g} \times \frac{-v dv}{av^2 + w},$$

ou par la division,

$$-dx + \frac{dx 2c}{c+x} = \frac{w}{32a} \times \frac{-v dv}{v^2 + \frac{w}{a}}.$$

62. Maintenant l'intégrale du premier membre de cette équation est évidemment $-x + 2c \log \text{hyp.}(c+x)$, et l'intégrale du second membre est, comme dans le cinquième problème, $-\frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.}\left(v^2 + \frac{w}{a}\right)$; ainsi on aura

$$-x + 2c \times \log \text{hyp.}(c+x) = -\frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.}\left(v^2 + \frac{w}{a}\right).$$

Si l'on fait $x=0$ et $v=V$ vitesse initiale, il vient

$$0 + 2c \times \log \text{hyp.} c = -\frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.}\left(V^2 + \frac{w}{a}\right).$$

Seconde partie.

Retranchant cette équation de la précédente, on a

$$-x + 2c \times \log \text{hyp.} \left(\frac{c+x}{c} \right) = \frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.} \frac{aV^2 + w}{av^2 + w},$$

et si l'on fait $v=0$, on aura

$$-x + 2c \times \log \text{hyp.} \left(\frac{c+x}{c} \right) = \frac{w}{6} \times \log \text{hyp.} \left(\frac{aV^2 + w}{w} \right),$$

d'où l'on tirera la valeur de x , qui sera la plus grande hauteur à laquelle le boulet s'élèvera.

63. x étant toujours très petit par rapport à c dans l'expression $\log \text{hyp.} \frac{c+x}{c}$, on aura à peu près par la nature des logarithmes,

$$\log \text{hyp.} \frac{c+x}{c} = \frac{x}{c + \frac{1}{2}x} \text{ ou } \frac{2x}{2c + x} (1);$$

cette valeur substituée dans l'équation, donne $-x + \frac{4cx}{2c + x}$ ou $\frac{2cx - x^2}{2c + x}$, ou enfin

$$\frac{2c-x}{2c+x} x = \frac{w}{64a} \times \log \text{hyp.} \frac{aV^2 + w}{w},$$

le second membre de cette équation est la valeur de x que nous avons trouvée dans le cinquième problème; en la faisant égale à b , on aura, pour déterminer x , l'équation du second degré, $\frac{2c-x}{2c+x} x = b$, ou en substituant b au lieu de x dans $\frac{2c-x}{2c+x}$, ce qui rendra le calcul plus facile, et par là on ne s'écartera pas beaucoup de la vérité, on aura

$$\left(\frac{2c-b}{2c+b} \right) x = b,$$

d'où $x = \frac{2c+b}{2c-b} b$, par conséquent $2c-b : 2c+b :: b : x$, c'est-à-

(1) Les deux premiers termes du développement en série de $\frac{x}{c + \frac{1}{2}x}$ sont les mêmes que ceux du développement en série de $\log \frac{c+x}{c}$.

dire qu'il suffira d'augmenter la valeur de x , trouvée dans le cinquième problème, dans le rapport de $2c - b$ à $2c + b$.

64. Maintenant la valeur de x , trouvée dans ce problème, était = 2930; et $2c$ étant = 110000, on aura $2c - b = 107070$, et $2c + b = 112930$; donc $107070 : 112930 :: 2930 : x = 3093$. Cette hauteur ne surpasse la précédente que de 163 pieds, c'est-à-dire de $\frac{1}{18}$.

Dans le cinquième exemple du cinquième problème $x = 6463$, on aura donc $2c - b : 2c + b$, ou $103537 : 116463 :: 6463 : 7285$. Dans cet exemple, la hauteur surpasse la première d'environ $\frac{1}{8}$.

PROBLÈME 9.

65. Déterminer le temps du trajet, ayant égard au décroissement de la densité de l'air, comme dans le problème précédent.

L'équation différentielle du temps est $dt = \frac{dx}{v}$, mais l'équation différentielle générale de l'espace x en fonctions de la vitesse v était dans le problème précédent $\frac{c-x}{c+x} dx = \frac{w}{32} \times \frac{-v dv}{av^2 + w}$, donc $dx = \frac{w}{32} \times \frac{c+x}{c-x} \times \frac{-v dv}{av^2 + w}$, d'où l'on tire

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{w}{32} \times \frac{c+x}{c-x} \times \frac{-dv}{av^2 + w};$$

mais x , qui est toujours très petit par rapport à c , est à peu près égal à b , déterminé, comme dans le dernier problème, par conséquent on peut à la place de $\frac{c+x}{c-x}$ mettre $\frac{c+b}{c-b}$, alors on a

$$dt = \frac{w}{32} \times \frac{c+b}{c-b} \times \frac{-dv}{av^2 + w}.$$

Cette différentielle est à celle trouvée dans le sixième problème comme $c - b : c + b$; leurs intégrales seront donc dans le même rapport. Mais dans le dernier problème $c = 55000$, et dans le premier exemple du cinquième problème $b = 2930$; donc $c - b = 52070$, et $c + b = 57930$; de même le temps déterminé dans le sixième problème était $9'',5$, donc $52070 : 57930 :: 9'',5 : 10'',57$, temps du trajet. Il est de $1'',7$, ou de la neuvième partie plus grand que dans le cas du problème 5; différence

qui est presque double de celle qu'on a trouvée ci-dessus entre les hauteurs.

PROBLÈME 10.

66. Déterminer toutes les circonstances du mouvement d'un boulet abandonné à son propre poids dans l'air.

Nous supposons ici que les boulets sont au moins aussi pesans que le fer fondu, en sorte que la perte de leur poids dans l'air soit insensible; ensuite, qu'ils partent du repos, et que leur mouvement soit uniquement dû à leur gravité. Recherchons d'abord la plus grande vitesse que le projectile peut acquérir en tombant dans l'air. Il est clair que la résistance, nulle au commencement du mouvement, augmente ensuite avec la vitesse. Or la force accélératrice de la pesanteur étant constante, et la force de résistance croissant continuellement, il arrive un instant où cette résistance sera égale à la force accélératrice; dès que cette égalité sera établie, le mouvement ne sera plus accéléré, et le boulet continuera à descendre avec un mouvement uniforme. Il suit de là que pour répondre à la première partie de la question, il nous faut déterminer quelle est la vitesse qui produit une résistance équivalente au poids même du projectile.

67. Si l'on jette maintenant un coup d'œil sur la table des résistances du premier et du second problème, le poids du projectile étant $1\frac{1}{8}$ lb, ou 1,125 lb, et son diamètre de 2 pouces, on voit, dans la dernière colonne, qu'aux vitesses 200 et 300 correspondent les résistances 0,709 et 1,612, entre lesquelles tombent 1,125, résistance proposée, équivalente au poids; mais dans les vitesses peu différentes, les résistances sont à peu près comme les carrés de ces vitesses. Par conséquent étant donnée la vitesse 200, qui a pour résistance 0,709, pour trouver la vitesse qui correspond à la résistance 1,125, on fera la proportion $0,709 : 1,125 :: 200^2 : v^2 = 63470$, d'où $v = \sqrt{63470} = 252$, qui est la plus grande vitesse que le boulet puisse acquérir, après quoi elle descend avec une vitesse uniforme, ou une vitesse d'environ 252 pieds par seconde.

Cette vitesse *maxima* peut aussi s'obtenir directement par la formule $0,0000176v^2 = r$, qui se trouve à la fin du deuxième problème. r est la résistance qui correspond à la vitesse v ; en faisant $r = 1,125$, on aura

La première colonne contient le poids des projectiles en livres; la seconde leurs diamètres exprimés en pouces; la troisième les vitesses finales des projectiles tombant à perpendiculaire dans l'air, et qui, pour la plus grande vitesse, est de 253, à peu près la même valeur que ci-dessus.

68. Maintenant pour un boulet d'un diamètre quelconque d , on observera que puisque les poids augmentent comme les cubes des diamètres, et les résistances seulement comme les carrés des diamètres, et dans le cas actuel aussi comme les carrés des vitesses, il faut par conséquent augmenter les carrés des vitesses dans le rapport des diamètres, c'est-à-dire qu'il faut faire la proportion $2 : d :: 252^2 : 31752d = v^2$; donc $v = 178 \sqrt{d}$, qui est la valeur générale de la plus grande vitesse d'un boulet dont le diamètre est d .

69. Prenons le boulet de 3^{lb}, le diamètre $d = 2,773$, on a $\sqrt{2,773} = 1,666$, et $178 \times 1,666 = 297$, pour la plus grande vitesse ou la vitesse uniforme avec laquelle le boulet de 3 livres finira par descendre, et le boulet de 6^{lb} a un diamètre de 3,494 pouces; alors $\sqrt{3,494} = 1,870$, et $178 \times 1,870 = 333$, pour la plus grande vitesse que le boulet de 6 livres puisse acquérir, après quoi il descendra avec une vitesse uniforme. Pour un boulet de 9 livres dont le diamètre est 4, la plus grande vitesse sera $178 \times 2 = 356$. On trouverait de même la plus grande vitesse pour des boulets d'un poids quelconque. D'après ce procédé, on a construit la table suivante.

POIDS en lb.	DIAMÈTRES en pouces.	VITESSES finales maxima v , en pieds.	HAUTEURS dues à la vitesse v , en pieds.	TEMPS de la chute dans le vide.
1	1,923	247	948	7,72
2	2,423	277	1193	8,66
3	2,773	297	1371	9,28
4	3,053	311	1503	9,72
6	3,494	333	1724	10,41
9	4,000	356	1970	11,12
12	4,403	374	2174	11,69
18	5,040	400	2488	12,50
24	5,546	419	2729	13,09
32	6,106	440	3010	13,75
36	6,350	449	3134	14,03
42	6,684	461	3304	14,50

La première colonne contient le poids des projectiles en livres; la seconde leurs diamètres exprimés en pouces; la troisième renferme les limites des vitesses que les projectiles tendent à prendre en tombant dans l'air, et qui, pour cette raison, sont appelées vitesses finales; la quatrième contient la hauteur due à cette vitesse ou les hauteurs d'où les boulets devraient tomber dans le vide pour acquérir ces vitesses; enfin la cinquième colonne renferme le temps de la chute dans le vide, des hauteurs déterminées dans la quatrième.

Mais il est évident que, dans leur chute, les projectiles ne peuvent jamais atteindre ces vitesses dans un temps fini, ou en traversant des espaces finis; elles sont seulement des limites vers lesquelles ils s'approchent sans cesse, sans pouvoir jamais y atteindre, quoiqu'ils en arrivent très près, et même dans un temps assez court, comme nous le verrons plus loin.

70. La plus grande vitesse étant de $178\sqrt{d}$ pieds, quand d est exprimé en pouces, elle sera de $178\sqrt{12d}$ ou $616,6\sqrt{d}$ quand d est exprimé en pieds. Maintenant l'espace qu'un corps doit décrire librement et sollicité seulement par la pesanteur, pour acquérir la même vitesse, s'obtiendra par la proportion $32 : \sqrt{16} :: 616,6\sqrt{d} : \sqrt{h}$, ou $8 : 1 :: 616,6\sqrt{d} : \sqrt{h}$. De là $\sqrt{h} = 77,1\sqrt{d}$, et par conséquent $h = 5944d$; mais la densité du boulet est à la densité de l'air comme $7400 : 1\frac{2}{9}$, ou comme $66600 : 11$, ou enfin $6054 : 1$; ce qui est à peu près le même rapport que $5944d$, ou h à d ; par conséquent la plus grande vitesse avec laquelle un boulet puisse descendre dans l'air est à peu près la même que celle qu'il acquerrait en tombant dans le vide, après avoir décrit un espace qui soit au diamètre du boulet à peu près dans le même rapport que celui de la densité du boulet à la densité de l'air.

Les espaces exacts h ou $5944d$, qui correspondent aux vitesses v de la troisième colonne, sont placés dans la quatrième colonne de la table ci-dessus. De même les temps de la chute dans le vide, ou les temps nécessaires pour que les boulets acquièrent les vitesses v , sont placés dans la cinquième colonne. On les a obtenus en divisant v par 32 pieds, qui est la vitesse acquise au bout de la première seconde, c'est-à-dire $\frac{v}{32} = t$.

71. Cherchons maintenant l'expression générale de l'espace décrit et du temps en fonctions de la vitesse. Soit x un espace variable, t le temps, et v la vitesse acquise, le poids du boulet étant $w = 1\frac{1}{8}$. Or par le théorème qui est à la fin du deuxième problème, et qui convient ici, puisque

la vitesse est petite, on a $0,0000176v^2 = cv^2$, pour la résistance due à la vitesse v , par conséquent $\frac{w - cv^2}{w}$ sera la force accélératrice; donc $v dv$ ou $2gfdx = 2gdx \times \frac{w - cv^2}{w}$ et $x = \frac{w}{4gc} \times \log \text{hyp.} \frac{w}{w - cv^2}$; telle est la longueur du chemin parcouru.

72. On voit ici que le dénominateur $w - cv^2$ décroît quand v augmente; ainsi la valeur de x croît avec v , et elle devient infinie lorsque $cv^2 = w$, le poids du boulet, ou quand le mouvement devient uniforme, comme nous l'avons remarqué plus haut.

73. On peut néanmoins assigner facilement la valeur de x un peu avant que le mouvement ne devienne uniforme, ou avant que cv^2 soit $= w$. Car, quand $cv^2 = w$, nous avons trouvé au commencement du problème $v = 252$; supposons donc que v ait une valeur un peu moindre que la plus grande valeur, par exemple $v = 246$; alors, en substituant ce nombre pour v dans la valeur générale ci-dessus de x , on a $x = 2927$ pieds, peu avant que le mouvement ne devienne uniforme.

74. C'est de cette manière que l'on peut déterminer la hauteur due à une autre vitesse quelconque, moindre que la plus grande ou vitesse finale. La même formule $x = \frac{w}{4gc} \times \log \text{hyp.} \frac{w}{w - cv^2}$, peut également servir à calculer la vitesse due à une hauteur donnée; car on en tire d'abord $\frac{4gcx}{w} = \log \text{hyp.} \frac{w}{w - cv^2}$; et en désignant par N le nombre correspondant à ce logarithme hyperbolique, il vient $N = \frac{w}{w - cv^2}$; et par conséquent $Nw - Ncv^2 = w$, d'où $v = \sqrt{\left(\frac{N-1}{c}\right)w}$; telle est la valeur générale de la vitesse en fonctions de l'espace. Supposons, par exemple, $x = 1000$, $4g$ étant toujours $= 64$, $w = 1 \frac{1}{8} \text{ lb}$, et $c = 0,0000176$, donc $\frac{4gcx}{w} = 1,0012$, et le nombre naturel qui répond à cette valeur, considérée comme logarithme hyperbolique, est $2,72162 = N$, d'où $v = \sqrt{\left(\frac{N-1}{c}\right)w} = 201$, pour la vitesse due à la hauteur 1000, ou quand le boulet est descendu de 1000 pieds.

75. Pour déterminer le temps de la chute, nous avons l'équation

$dt = \frac{dx}{v}$, mais $dx = \frac{w}{2g} \times \frac{v dv}{w - cv^2}$; donc on aura

$$dt = \frac{w}{2g} \times \frac{dv}{w - cv^2},$$

dont l'intégrale complète est

$$\frac{1}{4g} \sqrt{\frac{w}{c}} \times \log \text{hyp.} \frac{\sqrt{\frac{w}{c}} + v}{\sqrt{\frac{w}{c}} - v};$$

telle est l'expression générale du temps en fonction de la vitesse, et il est évident qu'elle augmente à mesure que son dénominateur $\sqrt{\frac{w}{c}} - v$ diminue, ou que v augmente, et t devient infini lorsque $\sqrt{\frac{w}{c}} - v = 0$, ou $\frac{w}{c} - v^2 = 0$, ou enfin $cv^2 = w$, c'est-à-dire quand la résistance est égale au poids du boulet, ce qui est le même cas que lorsque l'espace devient infini, comme nous l'avons remarqué plus haut.

76. Mais de même que nous avons fait pour la distance x , nous pouvons également trouver pour t une valeur correspondante à une vitesse v moindre que son maximum 252, par exemple, pour $v = 246$, ou $x = 2927$. Substituant donc 246 pour v dans la formule générale

$$t = \frac{1}{4g} \sqrt{\frac{w}{c}} \times \log \text{hyp.} \frac{\sqrt{\frac{w}{c}} + v}{\sqrt{\frac{w}{c}} - v},$$

il vient $t = 16''{,}957$; ainsi il lui faudra environ $17''$ pour acquérir une vitesse de 246 pieds, qui est un peu moindre que le maximum 252, ou pour descendre d'une hauteur de 2927 pieds.

77. De même, pour déterminer le temps correspondant à la vitesse 201, ou à la hauteur de 1000 pieds, nous aurons

$$\frac{1}{4g} \sqrt{\frac{w}{c}} = \frac{1}{64} \sqrt{\frac{1,125}{0,0000176}} = \frac{252}{64} = \frac{63}{16}, \text{ et } \frac{\sqrt{\frac{w}{c}} + v}{\sqrt{\frac{w}{c}} - v} = \frac{252 + 201}{252 - 201} = \frac{453}{51},$$

dont le logarithme hyperbolique est 2,184072; donc, $1,18407 \times \frac{63}{16} = 8''{,}6$

sera le temps de la chute d'une hauteur de 1000 pieds, ou quand la vitesse sera de 201 pieds par seconde.

PROBLÈME II.

78. Déterminer les circonstances du mouvement d'un boulet projeté horizontalement dans l'air, en faisant abstraction de la descente verticale produite par la gravité.

Soient d le diamètre du boulet, w son poids, V la vitesse de projection, et v sa vitesse, après avoir décrit l'espace x . Alors, d'après le premier corollaire du second problème, si la vitesse est considérable, ainsi que cela a lieu en effet dans la pratique, la résistance du boulet qui se meut avec la vitesse v sera représentée par $(mv^2 - nv) d^2$, par conséquent $\left(\frac{mv^2 - nv}{w}\right) d^2$ sera la force retardatrice f ; donc, d'après la formule ordinaire $v dv = 2g f dx$, on aura

$$-v dv = 32 dx \times \left(\frac{mv^2 - nv}{w}\right) d^2,$$

d'où

$$dx = \frac{w}{32d^2} \times \frac{-v dv}{mv^2 - nv} = \frac{w}{32d^2} \times \frac{-dv}{mv - n} = \frac{w}{32d^2 m} \times \frac{-dv}{v - \frac{n}{m}},$$

dont l'intégrale est évidemment $\frac{w}{32d^2 m} \times -\log \text{hyp.} \left(v - \frac{n}{m}\right) + c$, et en observant que quand $x=0, v=V$, il vient

$$x = \frac{w}{32d^2 m} \times \log \text{hyp.} \frac{V - \frac{n}{m}}{v - \frac{n}{m}} = \frac{w}{32d^2 m} \times \log \text{hyp.} \frac{V - q}{v - q},$$

pour la valeur générale de l'espace en fonction de la vitesse, ou $q = \frac{n}{m}$
 $= \frac{0,00175}{0,000007565} = 231.$

79. Pour réduire maintenant en nombre qui ne renferme que d le coefficient général $\frac{w}{32d^2 m}$, nous avons le poids du boulet $w = 0,5236d^3 \times 4,3 = 2\frac{1}{4}d^3 = \frac{9}{4}d^3$, où 4,3, est le poids en onces d'un pouce cube de fer fondu,

Seconde partie.

ou bien $w = \frac{9}{64}d^3$ en livres avoir du poids. Donc $\frac{w}{d^2} = \frac{9}{64}d$, et $\frac{w}{32md^2} = 58\frac{1}{4}d$; alors la formule devient $x = 58\frac{1}{4}d \times \log \text{hyp.} \frac{V-q}{v-q}$, et en multipliant le coefficient par 2,30258, qui est le logarithme hyperbolique de 10, afin de réduire les logarithmes hyperboliques en logarithmes ordinaires, $x = 1338d \times \log \frac{V-q}{v-q}$, le diamètre étant exprimé en pouces.

80. Pour faire une application de cette formule, supposons qu'il s'agisse de déterminer l'espace que doit parcourir un boulet de 24th pour que sa vitesse initiale 1780 pieds soit réduite à 1500 ou qu'elle ait perdu 280 pieds. Dans ce cas $d = 5,546$, $w = 24$, $V = 1780$, et $v = 1500$; de même $\frac{n}{m} = 231$, donc $x = 7420 \log \times \frac{V-231}{v-231} = 7420 \times \log \frac{1549}{1269} = 642$ pieds : tel est l'espace décrit par le boulet quand sa vitesse aura perdu 280 pieds.

81. On peut également trouver avec quelle vitesse le même boulet se mouvra quand il aura parcouru un espace de 1000 pieds; car la formule ci-dessus donnera x ou $1,000 = 7420 \times \log \frac{V-231}{v-231}$ ou $\frac{1000}{7420} = \log \frac{V-231}{v-231}$; mais le nombre qui répond au logarithme de $\frac{1000}{7420}$, est 1,3635 : appelons-le N ; alors il vient $N = \frac{V-231}{v-231}$, ou $N = \frac{1549}{v-231}$, d'où l'on tire

$$v = \frac{1549}{N} + 231 = 1136 + 231 = 1367 \text{ pieds,}$$

vitesse du boulet quand il aura parcouru 1000 pieds.

82. Cherchons maintenant une formule pour calculer le temps nécessaire pour parcourir un espace donné, ou pour qu'une certaine vitesse soit détruite. Nous avons

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{w}{32md^2} = \frac{-v^{-1}dv}{v - \frac{n}{m}} = \frac{w}{32md^2} \times \frac{-v^{-1}dm}{v-q},$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{w}{32md^2} \times \frac{1}{q} \log \text{hyp.} \frac{v}{v-q} + c = \frac{w}{32md^2} \times \log \text{hyp.} \frac{v}{v-q} + c,$$

quand $t = 0$, $v = V$; faisant ces substitutions, et retranchant la seconde équation de la première, on aura

$$t = \frac{w}{32md^2q} \times \left(\log h. \frac{v}{v-231} - \log h. \frac{V}{V-231} \right) \\ = \frac{w}{32md^2q} \times \log h. \frac{V-231}{v-231} \cdot \frac{v}{V} \frac{1338d}{231} \log \text{ord.} \frac{V-231}{v-231} \cdot \frac{v}{V},$$

en supposant que V soit la vitesse initiale, et en mettant 231 pour $\frac{n}{m}$ ou q .

83. Prenons maintenant, comme ci-dessus, le même boulet de 24 livres, projeté avec une vitesse de 1780 pieds, et voyons au bout de quel temps cette vitesse sera réduite à 786 pieds. Dans ce cas $V = 1780$, $v = 786$, $w = 24$, $d = 5,546$, $d^2 = 30,76$, d'où $\frac{1328d}{231} = \frac{7420}{231} = 32\frac{1}{8}$, et $\frac{V-231}{v-231} \cdot \frac{v}{V} = \frac{1549}{555} \times \frac{786}{1780} = 1,232$, dont le logarithme est 0,0906; donc $32\frac{1}{8} \times 0,0906 = 2'',9$, sera le temps cherché, qui est environ 3".

84. Voyons maintenant au bout de quel temps la vitesse sera réduite à 1000, ou quand elle aura perdu 780, alors $v = 1000$, et toutes les autres quantités sont les mêmes que ci-dessus; ainsi

$$\frac{V-231}{v-231} \times \frac{v}{V} = \frac{1549}{769} \times \frac{1000}{1780} = \frac{1549}{1369},$$

dont le logarithme est 0,053648, par conséquent $32\frac{1}{8} \times 0,053648 = 1,723$ secondes, est le terme cherché.

85. Si, au contraire, l'on demande à quoi la vitesse sera réduite au bout d'un certain temps, tel que 2'', par exemple, il faudra renverser les calculs ci-dessus; alors on a

$$t = 2'' = 32\frac{1}{8} \times \log \frac{V-231}{v-231} \cdot \frac{v}{V},$$

donc $\frac{2}{32\frac{1}{8}} = 0,062218$ sera le logarithme de $\frac{V-231}{v-231} \cdot \frac{v}{V}$. Le nombre répondant à ce logarithme est 1,1536; représentant ce nombre par N , on a

$$N = \frac{V-231}{v-231} \cdot \frac{v}{V},$$

d'où l'on tire

$$NVv - 231NV = Vv - 231v, \text{ et } v = \frac{231NV}{231 + N - V} = \frac{474337}{504} = 941,$$

pour la vitesse au bout de deux secondes.

86. Les calculs ci-dessus ne servent que pour les vitesses considérables, ou au-dessus de 300 à 400 pieds par seconde, mais pour celles qui sont au-dessous de 400 pieds, il est mieux d'employer la formule de la résistance du deuxième corollaire du deuxième problème, qui est $0,000004d^2v^2$, $= cd^2v^2$, où d est le diamètre du boulet. Ainsi employant les mêmes notations que précédemment, on aura

$$\frac{cd^2v^2}{w} = f, \text{ et } -v dv = 32fdx = 32dx \times \frac{cd^2v^2}{w},$$

par conséquent $dx = \frac{w}{32cd^2} \times \frac{-dv}{v}$, donc l'intégrale totale est

$$x = \frac{w}{32cd^2} \times \log \text{ hyp. } \frac{V}{v}.$$

87. Supposons que le boulet soit de 24^{lb} , la vitesse initiale $V=300$, et $v=100$; alors $w=24$, $d=5,546$, $d^2=30,76$, $c=0,0000044$, par conséquent $\frac{w}{32cd^2} = \frac{3}{123,04c} = 5542$, et $\frac{V}{v} = \frac{300}{100} = 3$, dont le logarithme hyperbolique est $1,0986$; donc $1,0986 \times 5542 = 6108 = x$ est l'espace parcouru, si la vitesse initiale était 200; alors $\frac{V}{v} = 2$, dont le log hyp. est $0,69315$; ainsi $0,69315 \times 5542 = 3841 = x$ l'espace.

88. Si, au contraire, on veut trouver la vitesse restante après que le boulet aura parcouru un certain espace, tel que 4000 pieds, sa vitesse initiale étant 200 pieds; dans ce cas le log hyp. de $\frac{V}{v}$ sera $\frac{x}{5542} = \frac{4000}{5542} = 0,72178$: le nombre qui répond à ce logarithme est $2,06$; donc $\frac{V}{v} = 2,06$, donc $v = \frac{V}{2,06} = \frac{200}{2,06} = 97,1$, pour la vitesse.

89. Pour trouver le temps t , on a

$$dx = \frac{w}{32cd^2} \times \frac{-dv}{v}, \text{ et } dt = \frac{dx}{v} = \frac{w}{32cd^2} \times \frac{-dv}{v^2};$$

en intégrant et déterminant la constante, on a

$$t = \frac{w}{32cd^2} \times \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right) = \frac{w}{32cd^2} \times \frac{V-v}{Vv}.$$

Si, par exemple, $V=300$ et $v=100$, alors $\frac{V-v}{Vv} = \frac{200}{30000} = \frac{2}{300}$, et $\frac{w}{32cd^2}$,

ou $5542 \times \frac{2}{300} = 36",95 = t$, temps après lequel la vitesse 300 sera réduite à 100, ou lorsque le boulet aura parcouru un espace égal à 6108 pieds.

90. Si l'on veut avoir la vitesse v qui correspond à un temps t , puisque $t = \frac{w}{32cd^2} \times \frac{V-v}{V} = 5542 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$, il viendra $v = \frac{5542V}{5542 + tV}$. En supposant $t = 30''$ et $V = 300$, on aura

$$v = \frac{5542V}{5542 + 9000} = \frac{5542}{14542} \times 300 = 114,$$
 pour la vitesse cherchée.

91. *Corollaire.* La même formule $x = \frac{w}{32cd^2} \times \log \text{hyp.} \frac{V}{v}$, dont nous nous sommes servis pour les petites vitesses, peut aussi servir pour de plus grandes, en faisant usage, comme dans le cinquième problème, de la résistance moyenne entre celles qui répondent aux deux vitesses données dans le premier exemple du présent problème, où les deux vitesses sont 1780 et 1500; la résistance due à la vitesse 1700 étant trouvée dans la table des résistances égale à 76,78, nous dirons $1700^2 : 1780^2 :: 76,78 : 84,18$, pour la résistance due à la vitesse 1780. La moyenne entre les deux nombres 84,18 et 59,20, due à la vitesse 1500, est 71,69, ou plutôt 72; donc $\sqrt{67,93} : \sqrt{72} :: 1600 : 1647$, vitesse due à la résistance moyenne 72; par conséquent, comme dans le problème cinquième, $1647^2 : v^2 :: 72 : 0,0000265v^2 = av^2$, qui sera la résistance due à la vitesse v , comprise entre les vitesses 1780 et 1500 pour un boulet de $1\frac{1}{8}$ livre, et le dernier terme de la proportion $2^2 : 5,546^2 :: av^2 : 7,69av^2 = 0,0002042v^2 = bv^2$ sera la résistance due à la même vitesse pour un boulet de 24^{lb}; donc $\frac{bv^2}{24} = f$ et $-v dv = 32f dx = \frac{4}{3} bv^2 dx$, d'où $dx = \frac{-3dv}{4bv}$, dont l'intégrale complète est

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{4b} \times \log \text{hyp.} \frac{V}{v} = \frac{3}{4b} \times \log \text{hyp.} \frac{178}{150} \\ &= \frac{3}{4b} \times \log \text{hyp.} \frac{89}{75} = 3674 \times 0,171148 = 629, \end{aligned}$$

pour l'espace cherché, et qui est à peu près le même que celui qu'on a trouvé ci-dessus (1).

(1) § 80.

PROBLÈME 12.

Trouver la courbe décrite par les projectiles dans l'air.

92. La détermination théorique de la trajectoire décrite par un projectile est un des problèmes les plus difficiles de la Dynamique, même en ayant recours aux expériences que nous avons faites jusqu'à présent sur cette partie de la Physique; et toutefois, pour la solution générale, il faut avoir égard à ces expériences. Même les solutions de Newton, de Bernouilli, d'Euler, de Borda, etc., après les recherches les plus laborieuses et avec tous les secours de l'Analyse moderne, ne donnent que des approximations très éloignées, et n'ont aucune utilité, même dans la Philosophie spéculative, à cause de la supposition d'une loi très fautive de la résistance de l'air; et encore moins dans la pratique, d'abord par la même raison, et ensuite à cause des moyens de calculs extrêmement compliqués et entièrement inapplicables aux besoins du service. La solution de ce problème exige, comme données indispensables, la détermination exacte, par l'expérience, de la nature et des lois de la résistance de l'air à différentes hauteurs pour des projectiles de volumes et de densités différens, et se mouvant avec toutes les vitesses usuelles. Malheureusement, à peine quelques expériences ont-elles été faites sur ce sujet, excepté celles qui ont été rapportées dans les traités précédens; et malgré qu'elles soient très étendues et très variées, je ne puis me permettre d'assurer qu'elles soient suffisantes pour l'objet de nos recherches sur la Ballistique, soit rationnelle, soit pratique.

93. Nous avons en effet fait connaître et nous avons déterminé un grand nombre de circonstances importantes concernant les projectiles militaires, circonstances inconnues jusqu'alors, ou du moins qui n'avaient été que conjecturées: telles sont la nature et la force de la poudre enflammée, la vitesse qu'elle imprime à des corps donnés; les lois de son action dans des canons de différentes longueurs et avec des charges différentes; les effets de la résistance de l'air sur ces projectiles lancés avec des vitesses connues; la quantité de cette résistance pour chaque degré de vitesse et pour chaque étendue de surface. De là nous avons déduit la loi générale, la résistance en fonction de la vitesse du corps; la vitesse perdue dans un temps donné, ou lorsque le corps a traversé un certain espace; le temps employé à parcourir un espace donné, ou l'es-

pace parcouru dans un temps connu; la hauteur totale à laquelle s'élève un corps lancé verticalement, et le temps de son élévation; la vitesse finale, ou la plus grande vitesse acquise par un corps qui descend dans l'air, ainsi que d'autres particularités curieuses.

94. Malgré tout cela, le grand problème reste encore à résoudre, c'est la détermination de la trajectoire d'un projectile lancé dans l'air avec une certaine vitesse et dans une direction oblique; les solutions de ce problème qui a été traité ou plutôt essayé par les plus grands géomètres nommés ci-dessus, se sont réduites à des spéculations partielles et stériles, d'aucun usage dans la pratique, quoique la question ait été traitée par des talens du premier ordre, mais dans l'hypothèse la plus simple de la résistance proportionnelle seulement au carré de la vitesse. Mais si l'on considère que cette hypothèse est entièrement inadmissible, qu'il n'y a aucune puissance monome de la vitesse qui puisse exprimer la résistance de l'air, mais que deux puissances différentes au moins sont absolument nécessaires pour cet objet, ainsi que nous l'avons montré dans les problèmes précédens; si l'on considère, dis-je, toutes ces circonstances, on sera entièrement convaincu qu'il ne reste aucun moyen praticable, ni même possible d'obtenir une solution scientifique du problème général en suivant cette marche, ou toute autre, à moins que l'on n'emploie quelques expériences ultérieures d'un autre genre: telles seraient des expériences soignées pour obtenir l'amplitude horizontale et le temps du trajet, au moins pour une seule espèce de boulet ou de bombe, lancé avec tous les degrés d'élévation et de vitesse en usage. Si ces mêmes expériences sont faites avec différens calibres, les conclusions n'en seront que plus exactes et plus satisfaisantes; mais au moins est-il de toute nécessité d'avoir ces données pour un calibre déterminé, et au moyen de principes connus, on pourra déduire de ces expériences les solutions pour les autres calibres, car les portées et le temps du trajet des boulets de calibres différens, mais de la même densité, pourront se déduire comme conséquences, puisque les boulets lancés avec des vitesses telles que leur résistance devienne proportionnelle à leur impulsion, décrivent des courbes semblables pour la même élévation de la pièce, et dans ce cas les différentes dimensions homologues des trajectoires sont proportionnelles les unes aux autres et aux diamètres des boulets.

95. Tout ce que l'on peut donc faire ici pour la solution de ce problème sera de choisir les règles les plus usuelles et fondées en partie sur la

théorie, et en partie sur la pratique. Nous commencerons donc d'abord par faire remarquer que la vitesse initiale d'un boulet peut se calculer à l'aide de nos tables des portées et des vitesses, ainsi que nous allons le faire voir dans le problème suivant.

PROBLÈME 13.

96. *Assigner la charge de poudre nécessaire pour projeter un boulet donné avec une vitesse donnée.*

Par les expériences précédentes, nous avons trouvé que les vitesses pour différens boulets et différentes charges de poudre, et avec la même pièce, étaient en raison directe de la racine carrée du poids de la poudre, et en raison inverse de la racine carrée du poids des boulets; par conséquent si l'on demande avec quelle vitesse un boulet de 24^{lb} sera lancé par 8^{lb} de poudre, nous voyons dans la table (1) que 8 onces de poudre impriment à un boulet d'une livre une vitesse de 1600 pieds; et puisque 8^{lb} = 128^{onces}, nous aurons, d'après la règle,

$$\sqrt{\frac{1}{8}} : \sqrt{\frac{128}{24}} :: 1600 : 1600 \sqrt{\frac{16}{24}} = 1600 \sqrt{\frac{2}{3}} = 1306,$$

la vitesse cherchée.

97. Autrement, on peut dire aussi la racine carrée du poids du boulet est à la racine carrée du double du poids de la poudre comme la vitesse donnée est à la vitesse cherchée; ainsi on a la proportion

$$\sqrt{24} : \sqrt{16} :: 1600 : 1306,$$

qui est la même vitesse que ci-dessus.

98. Mais quand les charges sont entre elles dans le même rapport que le poids des boulets, c'est-à-dire quand les pièces sont semblablement chargées, les vitesses sont à peu près égales. Ainsi le boulet d'une livre chargé avec 2 onces de poudre, ce qui est la huitième partie de son poids, et le boulet de 24 livres chargé avec 3 livres de poudre, ce qui est également la huitième partie de son poids, auront la même vitesse, c'est-à-dire 800 pieds. De la même manière, la vitesse 1200, donnée par la table,

(1) § 6 et 8.

qui répond à 4 onces de poudre, ce qui est le quart du poids du boulet, conviendra également à un boulet de 24 livres chargé avec 6 livres de poudre, ce qui est aussi le quart de son poids; et la vitesse 1600 qui répond à 8 onces de poudre, ce qui est la moitié du poids du boulet, sera aussi la vitesse imprimée à un boulet de 24 livres chargé avec 12 livres de poudre, qui est la moitié de son poids.

99. C'est de cette manière qu'a été formée la table ci-contre des vitesses initiales pour des boulets de fer, projetés par des canons de longueur ordinaire, avec toutes les charges de poudre, depuis la charge égale à la 20^e partie du poids du boulet jusqu'à celle égale à son poids total; la force de la poudre est supposée constante et de la meilleure qualité, ou telle que 2 onces de cette poudre, brûlées à mon éprouvette, fassent monter l'index à 40 ou au-delà, sur la ligne dite des cordes.

La première colonne montre combien de fois la charge de poudre c est contenue dans le poids du boulet b ; c'est le quotient du poids du boulet, divisé par celui de la charge. La seconde colonne contient les vitesses correspondantes imprimées aux boulets par ces charges de poudre, vitesses qui ont été calculées d'après l'expression $1600 \sqrt{\frac{2c}{b}}$.

RAPPORT du poids du boulet à celui de la poudre.	VITESSE du boulet en pieds.
20	506
19	519
18	533
17	549
16	566
15	584
14	605
13	628
12	653
11	682
10	716
9	755
8	800
7	855
6	924
5	1012
4	1131
3	1306
2	1600
1	2263

100. Cette table sera utile dans un grand nombre de circonstances, pour trouver la vitesse par la seule inspection. Si l'on désirait, par exemple, connaître la vitesse imprimée à un boulet par une charge de poudre égale au quart de son poids, la table montre que c'est entre 1100 et 1200; et réciproquement, elle indique quelle charge proportionnelle imprimera au boulet une vitesse proposée. Quant aux vitesses intermédiaires entre celles de la table, on peut trouver également leurs charges correspondantes. Car supposons qu'il s'agisse de déterminer quelle est la charge de poudre qui imprime à un boulet une vitesse de 1500 pieds, nous voyons par la table que la charge demandée doit être à peu près une moyenne entre la moitié et le tiers du poids du boulet; mais si on veut l'avoir exactement, on le pourra

facilement par l'expression $1600 \sqrt{\frac{2c}{b}}$, qui, dans ce cas, donne

$$1600 \sqrt{\frac{2c}{b}} = 1500, \text{ ou } 16 \sqrt{\frac{2c}{b}} = 15; \text{ d'où } \sqrt{\frac{2c}{b}} = \frac{15}{16}, \frac{2c}{b} = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256},$$

et $\frac{c}{b} = \frac{225}{512}$, ou $\frac{4}{9}$ à peu près; c'est-à-dire que la charge de poudre doit

être au plus les $\frac{4}{9}$ du poids du boulet, pour donner une vitesse de 1500 pieds; si donc c'est un boulet de 18, la charge sera 8^{lb}; si le boulet est de 24, la charge sera 10 $\frac{2}{3}$.

PROBLÈME 14.

101. *Déterminer l'élévation qu'il faut donner à une pièce pour atteindre un objet placé à une distance donnée, la vitesse du projectile étant connue.*

Ce problème est extrêmement utile dans la pratique de l'Artillerie; car il est évident que pour atteindre un objet placé à une certaine distance de la pièce, il est nécessaire de pointer la pièce au-dessus de la ligne visuelle de l'objet, à cause de la descente du projectile pendant le trajet, produite par la gravité. En effet, si le boulet était lancé exactement dans la direction de l'objet, il est clair qu'en conséquence de sa descente il tomberait plus bas, et manquerait l'objet; c'est pour cette raison que dans la pratique on hausse et l'on pointe la pièce autant au-dessus de l'objet que le boulet est supposé descendre pendant son trajet, de manière qu'il atteigne précisément l'objet lorsqu'il est arrivé à la distance connue. Cette hausse est communément très vague et incertaine, étant prise sans aucune espèce de règle, mais par des tâtonnements plus ou moins approchés, selon les notions de chaque pointeur; il est évident que de cette manière on ne peut obtenir que des résultats très douteux, même dans la supposition que le boulet soit exactement projeté dans la ligne suivant laquelle la pièce a été pointée, ce qui ordinairement est loin d'arriver, parce qu'il existe encore diverses autres causes d'irrégularité.

102. L'une de ces causes est la grandeur du vent, qui provient de ce que le boulet est le plus souvent trop petit pour le calibre de la pièce. De là il résulte que le boulet, en parcourant la longueur de l'âme, est lancé de côté et d'autre, ce qui jette beaucoup d'incertitude sur la direction que le projectile prendra en quittant la pièce. Il se dirigera tantôt

à droite ou tantôt à gauche du plan vertical passant par l'axe de l'âme, et tantôt au-dessus ou au-dessous de cette ligne, puisque le boulet prend ordinairement un chemin opposé au dernier point de la bouche du canon qu'il a frappé et contre lequel il rebondit. Par conséquent, pour parcourir régulièrement et en ligne droite l'âme de la pièce, il serait nécessaire que le vent fût le plus petit qui puisse s'accorder avec la possibilité d'introduire le projectile dans la pièce. Outre ces avantages déjà considérables, cette diminution de vent procurerait une économie dans la dépense de la poudre; car avec une moindre quantité on obtiendrait des vitesses plus fortes que celles en usage.

103. Un autre inconvénient dans la pratique de l'Artillerie, c'est la forme sphérique des projectiles. Il résulte de là que le boulet étant frappé de tous côtés par le gaz enflammé, acquiert dans la pièce un mouvement de rotation dont l'effet est, après que le boulet a quitté la pièce, de le faire écarter de plus en plus de la ligne de direction. Au contraire, si, au lieu de boulets ronds, on se servait de projectiles cylindriques plus ou moins longs, mais dont le diamètre serait à peu près égal à celui du calibre de la pièce, ils parcourraient en ligne droite l'âme de la pièce, et en sortant ils suivraient la ligne de direction et arriveraient au but avec beaucoup moins de déviation (1); outre cela, les canons seraient bien moins endommagés, et il faudrait moins de poudre. Ce changement dans la forme des boulets procurerait encore d'autres avantages; car, à cause du poids supérieur de ces projectiles, ils parcourraient un plus grand espace, et dans le service de la marine, non-seulement ils auraient l'avantage ordinaire d'être très lourds, mais, à cause de leur forme irrégulière, ils feraient dans les flancs des vaisseaux des trous qu'il serait difficile de boucher et de réparer (2). Par ce moyen la pratique pourrait être rendue beaucoup plus efficace et plus certaine, et par conséquent l'artilleur, au lieu de chercher par tâtonnement, pourrait trouver par des règles sûres et faciles l'élévation qu'il convient de donner à la pièce pour atteindre le but.

104. Soit donc un but placé à une distance connue et horizontale de la

(1) L'inégale résistance qu'oppose l'air à un projectile cylindrique, à un projectile de forme irrégulière, augmenterait au contraire les causes de déviation et ferait perdre tous les avantages qu'on aurait obtenus par la suppression des battemens dans la pièce. Voyez Aide-Mémoire, page xxvj, 5^e édition.

(2) Dans la marine, et à des distances peu considérables, l'emploi des boulets oblongs peut présenter quelques avantages. Voyez Douglas, Artillerie navale, page 45 de la traduction de M. Charpentier.

bouche du canon. Dès que le boulet sort de la pièce, il descend au-dessous de sa direction primitive par la force de la gravité, et cela d'autant plus rapidement que le mouvement dure plus long-temps. Lors donc que le temps et la distance sont assez considérables pour faire décrire au boulet une ligne sensiblement courbe et pour le faire arriver à un point situé au-dessous du but; dans ce cas, il faut diriger la pièce vers un second point situé au-dessus du but autant que le premier point est au-dessous, et le boulet décrivant sa trajectoire viendra frapper le but. Il est donc nécessaire de considérer le projectile comme lancé dans une direction horizontale, et de chercher combien il descendra plus bas que le but, ce qui est facile si l'on connaît le temps du trajet, car cette ligne verticale de descente sera décrite par l'action de la gravité, à raison de 16 pieds dans la première seconde, et dans le rapport des carrés des temps. Ainsi donc,

105. Connaissant la distance au moins approchée du point que l'on doit atteindre, on calculera la vitesse qu'imprimera au boulet la charge de poudre donnée, ou quelle charge de poudre sera nécessaire pour imprimer au boulet une vitesse donnée; ayant donc par ce moyen la vitesse initiale, on cherchera par le problème 2 la vitesse qu'il perdra en traversant le milieu résistant compris entre le canon et le but, et en retranchant ce résultat du premier, on aura la vitesse au moment où il frappe l'objet. La moyenne entre les vitesses de départ et d'arrivée pourra être considérée comme une vitesse moyenne uniforme avec laquelle le boulet traverse l'espace compris entre le canon et le but: en divisant cet espace donné ou la distance par cette vitesse moyenne, tous deux exprimés en pieds, on aura à très peu près le temps du trajet exprimé en secondes; ou bien on peut encore trouver le temps par le problème 11. Enfin on cherchera l'espace décrit par un corps qui tomberait librement dans le vide pendant le temps trouvé, et ce sera la quantité qui indiquera de combien il faudra pointer au-dessus de l'objet pour l'atteindre; ou bien l'on calculera, par le problème 10, de combien de pieds un corps descend dans l'air pendant ce temps, et ce sera la hauteur vers laquelle il faudra pointer au-dessus de l'objet.

106. *Exemple 1.* Supposons que la distance au but soit de 1000 pieds, et que la pièce soit de 24, chargée avec 6 livres de poudre. Nous aurons d'abord, par le problème 13,

$$\sqrt{24} : \sqrt{12} :: 1600 : 1600\sqrt{\frac{1}{2}} = 1131 = V \text{ vitesse initiale.}$$

De même, par le problème 11, $1131 - 231 = 900$, et $N = 1,3635$; donc $\frac{900}{N} + 231 = 660 + 231 = 891 = v$ vitesse du boulet quand il arrive au but, et la moyenne entre 1131 et 891 est 1011; donc $\frac{1000}{1011} = 1''$ environ. Or l'espace décrit par un corps qui descend pendant une seconde est 16 pieds, donc le boulet atteindra l'objet si l'on dirige la pièce vers un point élevé de 16 pieds au-dessus du but, ou en divisant 16 par la distance 1000 et cherchant le quotient 0,016 dans la table des tangentes, on trouvera 55', ou à peu près 1° pour l'angle d'élévation de la pièce; en prenant le logarithme de $\frac{16}{1000}$ et cherchant dans les logarithmes des tangentes, on trouvera également 55' environ.

107. La formule du problème 11 donne le temps égal à

$$32 \frac{1}{8} \times \log \frac{V-321}{v-231} \cdot \frac{v}{V} = 32 \frac{1}{8} \times \log \frac{1131-231}{891-231} \cdot \frac{891}{1131} = 32 \frac{1}{8} \log \frac{900 \cdot 891}{600 \cdot 1131} \\ = 32 \frac{1}{8} \times 0,031114 = 1,003426, \text{ ou } 1'' \text{ environ,}$$

comme on l'a trouvé plus haut en divisant la distance par la vitesse moyenne.

108. *Exemple 2.* Déterminer l'élévation d'une pièce de 12 chargée avec 4 livres de poudre, pour atteindre un objet éloigné de 500 yards ou de 1500 pieds. Dans ce cas, le poids de la poudre est le tiers de celui du boulet; par conséquent (table du 13^e problème), la vitesse initiale est $1306 = V$, le diamètre du boulet $d = 4,403$, et la distance de l'objet...

$D = 1500 = 1338d \times \log \frac{V-q}{v-q} = 5891 \times \log \frac{1075}{v-231}$ (problème 11). De là $\frac{D}{1338d} = \frac{1500}{5891} = 0,25462$; le nombre qui répond à ce logarithme est 1,7973 = N, c'est-à-dire $N = \frac{1075}{v-231}$, ce qui donne

$v = \frac{1075}{N} + 231 = 829 = v$ = vitesse du boulet arrivé à l'objet; par conséquent $\frac{V+v}{2} = 1068$ sera la vitesse moyenne et $\frac{1500}{1068} = 1,405'' =$ le temps du trajet, d'après cette méthode.

Mais d'après celle du 11^e problème, on a

$$t = \frac{1338d}{231} \times \log \frac{V-q}{v-q} \cdot \frac{v}{V} = \frac{5891}{231} \times \log \frac{1306-231}{829-231} \cdot \frac{829}{1306} \\ = 25 \frac{1}{2} \times \log \frac{1075 \cdot 829}{598 \cdot 1306} = 25 \frac{1}{2} \times 0,057319 = 1,4616'',$$

plus exact que le premier résultat, mais qui en diffère très peu.

Ainsi $1^a : 1,46^a :: 16 : 34,1$ pieds = hauteur au-dessus de l'objet vers lequel il faut pointer, ou $\frac{34}{1500} = 0,022737$, tangente de $1^a 18'$, angle d'élévation de la pièce.

109. *Corollaire.* Du calcul précédent on peut facilement conclure la règle générale suivante. Si l'on désigne par D la distance de l'objet en pieds; par d le diamètre du boulet en pouces, que l'on obtient par la table du problème 10; par b le poids du boulet, et par c celui de la poudre, exprimés tous deux en livres; par $V = 1600 \sqrt{\frac{2c}{b}}$ la vitesse de projection, ainsi qu'elle est donnée dans le 13^e problème; par v la vitesse avec laquelle le boulet frappe l'objet, et par t le temps du trajet: alors il faudra diviser D par $1338d$, et considérer le quotient $\frac{D}{1338d}$ comme un logarithme; faire $N =$ au nombre dont le logarithme est $\frac{D}{1338d}$, faire $v = \frac{V-q}{N} + q$ la vitesse finale, et $t = \frac{1338d}{q} \times \log \left(\frac{V-q}{v-q} \cdot \frac{v}{V} \right)$ (problème 11), ou $t = \frac{2D}{V+v}$, ce qui est une approximation assez grande; alors $16t^2 = \frac{4D^2}{(V+v)^2}$ donnera la hauteur du point au-dessus du but et vers lequel il faudra pointer, et $\frac{16t^2}{D} = \frac{4D}{(V+v)^2}$ est la tangente de l'angle d'élévation.

110. Ainsi la hauteur verticale de l'endroit vers lequel il faut pointer est à peu près comme le carré de la distance, tandis que l'angle d'élévation est comme la distance, la vitesse du projectile restant la même; mais dans le cas de vitesses différentes, la hauteur et l'angle sont à peu près réciproquement proportionnels au carré de la vitesse. Lors donc que l'angle qui convient à chaque distance aura été calculé par la théorie et vérifié par l'expérience, on pourra pointer le canon de manière à ce que la ligne visuelle fasse cet angle avec l'axe de la pièce. Maintenant ces élévations étant à peine perceptibles, on voit clairement la raison pour laquelle le boulet, à partir du canon, parcourt un très grand espace presque en ligne droite; mais quelque petite que soit la courbure initiale de la trajectoire lorsque la pièce est pointée horizontalement, elle est encore plus petite quand il y a un angle d'élévation au-dessus de l'horizon, parce que, dans ce cas, la gravité agit obliquement sur le boulet, de sorte qu'il n'y a qu'une partie de la pesanteur d'employée à infléchir la trajectoire, tandis que dans le tir horizontal toute la gravité est employée pour cet objet. Cette partie est à peu près comme

le cosinus de l'angle d'élévation, et devient d'autant plus petite que cet angle est plus grand ou s'approche davantage de la verticale, en sorte que quand la pièce est pointée verticalement, il n'y a plus de courbure et le boulet monte verticalement en ligne droite.

PROBLÈME 15.

111. *Déterminer l'angle d'élévation qui donne la plus grande amplitude, et trouver la longueur de cette amplitude pour une vitesse donnée.*

Dans la théorie parabolique des projectiles, ou lorsqu'ils sont lancés dans un milieu non résistant, l'on sait que, pour donner la plus grande amplitude, la direction de la pièce doit être telle, qu'elle divise en deux parties égales l'angle que fait la verticale avec le plan sur lequel est mesurée l'amplitude; et quand l'amplitude est sur un plan horizontal, la direction de la pièce doit faire un demi-angle droit avec l'horizon ou avec la verticale; mais quand on est placé sur un plan incliné, la direction de la pièce doit faire avec la verticale un angle moindre ou plus grand que 45° de la moitié de l'angle d'inclinaison, selon que cette inclinaison est au-dessus ou au-dessous de l'horizon.

112. Les courbes décrites dans l'air ne jouissent d'aucune de ces propriétés, d'une si belle simplicité; au contraire tout y est compliqué: les branches ascendantes et descendantes de la courbe à droite et à gauche de la verticale sont tout-à-fait inégales et dissemblables; et au lieu d'être des courbes paraboliques, elles semblent plutôt être différentes branches d'une espèce d'hyperbole, puisqu'elles ont deux asymptotes différentes, dont l'une est inclinée et l'autre est perpendiculaire à l'horizon.

113. Dans la théorie parabolique, la vitesse horizontale du boulet ou son mouvement, estimé dans une direction horizontale, est constante, parce que l'action de la gravité étant la seule force qui agisse sans cesse sur lui, s'exerce dans une direction perpendiculaire à l'horizon. Mais c'est entièrement différent dans la véritable trajectoire; car outre la force de la gravité, il y a encore la résistance de l'air qui agit tangentielllement à la courbe, ou qui est directement opposée à son mouvement. C'est par cette raison que la vitesse horizontale du boulet est continuellement diminuée pendant toute la durée du mouvement, dans les

branches ascendantes et dans les branches descendantes de la courbe. Il arrivera donc, par les deux causes assignées, que le mouvement ascendant du boulet diminuera très promptement, et il ne s'élèvera pas si haut que dans le cas parabolique. Le sommet de la courbe ne sera plus ni aussi élevé au-dessus, ni aussi éloigné de l'origine dans le sens horizontal. De même, dans la branche descendante, après que le boulet aura dépassé le sommet, la gravité accélérera son mouvement vertical vers la terre, et le mouvement horizontal diminuera encore; de là il résulte que la direction du boulet dans sa chute tend de plus en plus à devenir verticale, jusqu'à ce qu'enfin, le mouvement horizontal étant presque entièrement détruit, le boulet descende presque perpendiculairement à la surface de la terre avec une vitesse qui, quoiqu'elle aille toujours en augmentant, ne pourra jamais surpasser ni même égaler cette vitesse finale dont il est question dans le dixième problème; elle est donc la dernière limite de la vitesse que le boulet pourra atteindre dans son trajet descendant.

114. D'après toutes ces circonstances du mouvement du boulet, il est évident que les deux branches de la courbe sont des espèces d'hyperboles ayant des asymptotes placées dans des positions différentes; celle de la branche ascendante est inclinée à l'horizon, et celle de la branche descendante est verticale. De plus, le mouvement dans la branche ascendante est plus rapide, et sa durée est moindre que dans la branche descendante, puisque dans celle-ci le mouvement ne peut qu'approcher d'une certaine limite appelée vitesse finale. La branche ascendante a aussi, généralement parlant, une moindre courbure que la branche descendante.

115. De même, la plus petite vitesse du boulet dans le mouvement parabolique est au sommet de la courbe; mais dans l'air ou dans un autre milieu résistant, le point où la vitesse atteint son minimum n'est pas au sommet, mais un peu au-dessous dans la branche descendante, parce qu'en cet endroit le mouvement presque horizontal éprouve une plus grande résistance du milieu, n'étant que peu augmentée par l'action de la gravité; par la même raison, le point de plus grande courbure n'est point au sommet, comme dans la théorie parabolique, mais un peu au-dessous. L'ordonnée maxima verticale est plus petite dans la trajectoire que dans la parabole; et le point de chute est plus rapproché de cette ordonnée que le point de départ: ces deux dernières distances sont

moins grandes parfois que dans la parabole, dans le rapport de 10 et même de 20 à 1.

116. Enfin l'angle d'élévation de la pièce, pour obtenir la plus grande amplitude, la vitesse restant la même, n'est plus égal à 45° , comme dans la théorie parabolique; il est moins considérable, et d'autant moins que le boulet est plus petit et que la vitesse est plus grande, parce que, projeté sous de petits angles, le boulet ayant à traverser un moindre nombre de couches d'air, éprouve une moindre résistance que sous des angles plus élevés. Il arrive de là que l'angle d'élévation, pour la plus grande amplitude horizontale, peut être, pour tous les cas, entre 45° et 30° ; aux plus petites vitesses et aux plus gros boulets répond l'angle de 45° , qui va toujours en diminuant, à mesure que le calibre du boulet diminue et que la vitesse augmente, jusqu'à ce qu'enfin on parvienne à 30° , qui répond au mouvement le plus rapide et au plus petit boulet.

117. Par toutes ces considérations, l'on voit d'abord combien il est difficile d'établir une formule qui puisse retracer, avec un degré suffisant d'utilité pratique, toutes les circonstances, ou seulement quelques-unes, de la courbe que décrivent les projectiles. Mais si l'on fait attention ensuite que la formule par laquelle on exprime la résistance en fonctions de la vitesse est nécessairement complexe, puisqu'elle est composée de deux puissances de la vitesse au moins, on sera parfaitement convaincu que la solution complète du problème est de toute impossibilité (1). Par conséquent tout ce qui a été fait sur cette matière, par les plus habiles mathématiciens qui aient existé, avec le secours de toutes les ressources des méthodes les plus subtiles de l'analyse, n'a donné que des résultats très éloignés de la vérité. La question doit demeurer dans cet état, jusqu'à ce qu'on puisse faire des expériences soignées sur les amplitudes et le temps du trajet des projectiles avec tous les degrés d'élévation et de vitesse; mais il est à craindre que ces expériences ne se fassent pas de sitôt. Les théories sur cet objet, proposées par Newton, Robins, Euler et le professeur Robison, paraissent le plus approchées des résultats de la pratique, et nous avons tâché de nous servir de quelques-unes pour notre objet, en y faisant néanmoins divers changemens, et les corrections fondées sur la connaissance plus exacte de la nature et de la quantité de la résistance que nous avons acquise par nos expériences.

118. D'abord étant données la vitesse initiale et le calibre du boulet,

(1) Dans l'état actuel du Calcul intégral.

nous pourrions trouver, par approximation, l'angle d'élévation qui donne la plus grande amplitude, et la grandeur de cette amplitude.

Ces quantités peuvent être évaluées approximativement par le moyen de la table suivante, due à Newton, et qui a été corrigée par le professeur Robison, dans l'Encyclopédie britannique. Les nombres de la première colonne, multipliés par la vitesse finale du boulet, donnent la vitesse initiale, et les nombres de la dernière colonne étant multipliés par les hauteurs dues aux vitesses finales, donnent la plus grande amplitude; la colonne du milieu indique les élévations nécessaires pour produire ces amplitudes.

Table des élévations qui donnent les plus grandes amplitudes.

VITESSE initiale divisée par v .	ÉLÉVATION.	AMPLITUDE divisée par a .
0,6910	44° 0'	0,4110
0,9445	43 15	0,6148
1,1980	42 30	0,8176
1,4515	41 45	1,0210
1,7050	41 0	1,2244
1,9585	40 15	1,4278
2,2120	39 30	1,6312
2,4655	38 45	1,8346
2,7190	38 0	2,0379
2,9725	37 15	2,2413
3,2260	36 30	2,4447
3,4795	35 45	2,6481
3,7330	35 0	2,8515
3,9865	34 15	3,0549
4,2400	33 30	3,2583
4,4935	32 45	3,4616
4,7470	32 0	3,6650
5,0000	31 15	3,8684

119. Pour se servir de cette table, il faut diviser la vitesse initiale donnée par la vitesse finale constante particulière au boulet, consignée dans la table du 10^e problème, et chercher dans la première colonne de la table le nombre le plus approchant du quotient trouvé. Le nombre correspondant de la seconde colonne indiquera l'élévation nécessaire pour produire la plus grande amplitude; et le nombre de la troisième colonne multiplié par a ,

qui est la hauteur due à la vitesse finale, et que l'on trouvera également dans la table du 10^e problème, donnera à peu près l'amplitude du jet.

120. *Exemple 1^{er}.* Supposons qu'il s'agisse de trouver la plus grande amplitude d'un boulet de 24^{lb} lancé avec une vitesse initiale de 1640 par seconde, et l'angle correspondant pour produire la plus grande amplitude. Par la table du 10^e problème, la vitesse finale d'un boulet de 24^{lb} est 419, et la hauteur due à cette vitesse est 2729; donc $\frac{1640^2}{419^2} = 3,92$, ce qui est environ égal à 3,9865 de la première colonne, auquel nombre correspond l'angle de 34° 15', qui est par conséquent l'élévation pour produire la plus grande amplitude, et le nombre correspondant 3,0549 de la troisième colonne, multiplié par 2729, donne 8336 pieds pour la plus grande amplitude; elle dépasse un mille et demi.

121. *Exemple 2.* Le même boulet, lancé avec une vitesse de 860 pieds par seconde, aura pour son maximum d'amplitude 4081 pieds, et l'angle qui produira ce maximum sera de 40°.

122. *Corollaire.* Ces exemples, et tous ceux de la table du 10^e problème, ne sont adaptés qu'à des boulets de canon. Mais ce n'est pas l'usage et ce ne serait en effet pas aisément praticable, du moins dans le service de l'artillerie britannique, de lancer les boulets de canon sous de tels angles, qui ne conviennent qu'à des mortiers: sous ce rapport, il est nécessaire de construire une autre table des vitesses finales et des amplitudes dues à ces vitesses, pour les différentes espèces de mortiers. Les diverses espèces employées maintenant sont désignées, dans la table qui suit, par la grandeur du diamètre de leur âme, exprimée en pouces; ce sont les cinq suivantes: les mortiers de 4^p, 6, de 5, 8, de 8, de 10 et de 13, ainsi qu'on le voit dans la première colonne de la table suivante. Les diamètres des bombes sont un peu plus petits, ainsi qu'on le voit dans la seconde colonne.

Table des dimensions, etc., des mortiers.

DIAMÈTRE du mortier.	DIAMÈTRE de la bombe.	POIDS de la bombe vide.	POIDS de la bombe remplie de poudre.	POIDS d'un boulet plein, de même calibre.	RAPPORT du poids de la bombe remplie à celui du boulet.	VITESSE finale.	HAUTEUR z due à la vitesse.
pouces.	pouces.	lb	lb	lb		pieds.	pieds.
4,6	4,53	8,3	9	$12\frac{3}{4}$	1,42	318	1580
5,8	5,72	16,7	18	$25\frac{1}{2}$	1,42	356	1980
8	7,90	43,8	47	67	1,42	420	2756
10	9,84	85,5	$91\frac{1}{2}$	130	1,42	468	3422
13	12,80	187,8	201	286	1,42	534	4430

La troisième colonne contient le poids de chaque bombe, quand elle est vide; la quatrième colonne, quand elle est remplie de poudre. Le diamètre de la partie creuse est ordinairement les $\frac{7}{10}$ de celui du mortier, et comme la partie vide de la bombe est remplie seulement de poudre à canon, il s'ensuit que le poids de toute la bombe, remplie de cette manière (poids qui se trouve dans la quatrième colonne), est beaucoup moindre que le poids d'un boulet de fer de même dimension, et le poids correspondant d'un tel boulet se trouve dans la cinquième colonne. Le rapport de ces poids, ou le quotient du dernier divisé par le premier, occupe la sixième colonne.

123. Maintenant, puisque les bombes chargées ont une pesanteur spécifique moindre que les boulets de fer de même dimension, dans le rapport de 1 à 1,42, comme on le voit dans la sixième colonne, les premières auront moins de puissance ou de force pour s'opposer à la résistance de l'air dans le même rapport, et la vitesse finale, ou la plus grande vitesse, ainsi qu'elle est déterminée dans le 10^e problème, sera plus petite dans la même proportion; par conséquent, au lieu de l'équation donnée, qui est $v = 178 \sqrt{d}$ pour cette vitesse, nous aurons

$$178 \sqrt{\frac{d}{1,42}} = 149,4 \sqrt{d} = v,$$

le diamètre de la bombe étant d ; c'est-à-dire que les vitesses finales seront toutes plus petites dans le rapport de 149,4 à 178. Maintenant, en

calculant les différentes vitesses d'après cette règle, pour les divers diamètres, on les trouvera telles qu'elles sont dans la septième colonne. La huitième colonne renferme les hauteurs dues à ces vitesses dans le vide, et calculées par la formule $\frac{v^2}{64}$.

124. Ayant donc obtenu ces vitesses finales et les hauteurs dues à ces vitesses pour les bombes, nous pouvons, d'après cela et la première table des portées et des hauteurs, calculer aisément la plus grande portée et l'angle d'élévation qui y correspond, pour un mortier ou une bombe quelconque, en s'y prenant de la même manière que pour les boulets. Ainsi, par exemple, pour trouver la plus grande portée et l'élévation pour une bombe de 13 pouces projetée avec une vitesse de 2000 pieds par seconde, ce qui est à peu près la plus grande vitesse avec laquelle cette bombe puisse être lancée, nous aurons, par la méthode ci-dessus, $\frac{2000}{534} = 3746$. Vis-à-vis ce nombre, que l'on trouve dans la première colonne de la table des portées, correspond $35^\circ 0'$ dans la seconde colonne, pour l'angle d'élévation, et 2,8515 dans la troisième colonne. En multipliant ce nombre par 4430, on a 12632, ou 2000 pieds $\frac{1}{2}$ pour la plus grande portée.

Cette distance néanmoins est encore très courte, en comparaison de celle à laquelle on dit que les Français lancèrent des bombes au siège de Cadix, c'est-à-dire à une distance de plus de 3 milles, ce qui paraît avoir été fait par le moyen d'une pièce d'artillerie particulière, et en chargeant ou remplissant de plomb la cavité de la bombe, ce qui la rendait plus lourde, et par conséquent plus propre à vaincre la résistance de l'air. Examinons donc quelle serait la plus grande portée de notre bombe de 13 pouces, remplie de plomb et lancée avec une vitesse de projection de 2000 pieds par seconde (1).

125. Le diamètre de la cavité étant environ les $\frac{7}{10}$ de celui de la bombe, qui est 13 pouces, sera à peu près 9 pouces, et le poids du globe de plomb est de 139,3^{lb}, ce qui, ajouté à 187,8^{lb}, poids de la bombe vide, donne 327^{lb} pour le poids total de la bombe quand la cavité est remplie de plomb; le poids du même volume de fer a été trouvé de 286^{lb}; le rapport de ces deux poids est 0,8783. Ainsi nous aurons comme ci-dessus la formule $178 \sqrt{\frac{d}{0,8783}}$ pour la vitesse finale, qui, lorsque $d = 12,8$, devient 680;

(1) Ce sont les mortiers de Villantroys dont il est question dans l'Avis placé à la tête de cette traduction.

la hauteur due à cette vitesse est $\frac{680^2}{64} = 7225$. Ensuite on aura, par la même méthode, $\frac{2000}{680} = 2,941$; à ce nombre, que l'on trouvera dans la première colonne de la table des portées, correspond, dans la seconde colonne, $37^\circ 20'$ pour l'angle d'élévation, et dans la troisième, 2,2153, qui, multiplié par 7225, donne 16005 ou 3 milles et 165 pieds. Ainsi nos bombes de 13 pouces, lancées sous un angle d'élévation de $37^\circ \frac{1}{3}$, porteront à une distance environ égale à celle mentionnée par les Français, lorsqu'elles sont remplies de plomb et qu'elles partent avec une vitesse de 2000 pieds ou au-dessus. Néanmoins on pense que cela ne peut avoir lieu pour nos mortiers, et il est par conséquent probable que les Français, pour donner à leurs bombes une telle vitesse, ont dû employer dans cette occasion une espèce de canon très large. On dit que ces bombes, après avoir été remplies de plomb, sont forcées pour recevoir la fusée, qu'elles éclatent rarement, et que quand cela a lieu l'explosion n'est pas très considérable (1).

PROBLÈME 16.

126. *Déterminer les portées pour d'autres élévations obliques.*

Ayant indiqué, dans les articles et les problèmes précédens, comment, de la théorie de la résistance de l'air, on peut conclure, 1°. la vitesse initiale ou la vitesse de projection des boulets et des bombes; 2°. la vitesse finale ou la plus grande vitesse qu'un boulet puisse acquérir en descendant dans l'air; 3°. la hauteur à laquelle s'élève un boulet dans l'air, lorsqu'il est lancé avec une vitesse donnée, et le temps de son élévation; 4°. la plus grande portée horizontale d'un boulet lancé avec une vitesse connue, ainsi que l'angle particulier d'élévation d'une pièce, pour produire la plus grande amplitude; il ne reste plus qu'à chercher maintenant quelles lois on peut établir et quelles règles on peut donner concernant les portées, le temps du trajet des projectiles lancés sous d'autres angles d'élévation.

127. Les meilleures règles que l'on pourrait donner pour la solution générale de ce problème seraient celles déduites d'épreuves, en les faisant à tous les degrés d'élévation, avec toutes sortes de charges, et avec différentes espèces de boulets, en observant et la portée et le temps du

(1) Ces renseignemens ne sont pas exacts, ce qui ne paraîtra pas surprenant, si l'on considère que le siège de Cadix a eu lieu en 1810, et que Hutton a publié ses *Traité*s en 1812. Hutton ignorait aussi que c'est aux lois qu'il a découvertes sur le tir, que nous devons les pièces dites à la Villantroys. Voyez l'Avis du traducteur.

trajet dans chaque expérience. De telles épreuves nous apprendraient aussi à connaître les relations qui existent, dans tous les cas, entre ces quatre quantités, les portées, les temps du trajet, les vitesses ou les charges et les calibres des boulets. Quelque nombreuses et variées que soient les expériences rapportées précédemment, et quelque fertiles qu'elles soient en résultats utiles, on n'a obtenu qu'une faible partie de ceux auxquels on voulait parvenir, et je ne sache pas que dans d'autres pays on soit, à cet égard, plus avancé que dans le nôtre. Ainsi il reste encore beaucoup à désirer sur cet objet; le peu que nous avons été à même de faire se trouve dans les articles 8 et 24 de ce Traité, et elles ne nous offrent que quelques règles imparfaites, parmi lesquelles nous mettrons les suivantes :

1°. Les portées des boulets d'une livre, avec un angle d'élévation de 15° , sont à peu près proportionnelles au temps du trajet ;

2°. Les portées des boulets de 3 livres, à une élévation de 45° , sont à peu près comme les temps des trajets, et aussi comme les vitesses des projectiles. Après ces conséquences, il ne paraît pas que les expériences soient assez nombreuses pour offrir un plus grand nombre de conclusions utiles; cependant en faisant un choix parmi les différens nombres de la table de l'article 24, il paraît que dans le plus grand nombre de cas, et à un angle d'élévation compris entre 30° et 45° , le temps du trajet exprimé en secondes est à peu près égal au quart de la racine carrée de la portée, comptée en pieds, ce qui s'accorde assez bien avec la règle semblable pour trouver le temps du trajet dans la théorie parabolique sous un angle de 45° , qui donne la plus grande portée; ce temps est, comme on le sait, égal au quart de la racine carrée de la portée exprimée en pieds, quelle que soit la densité du boulet. On voit donc par là qu'il est probable qu'avec le secours de quelques autres portées, à différens angles d'élévation, on pourrait déduire des relations entre les portées, les temps du trajet et les tangentes des angles d'élévation. Malheureusement il n'est pas en mon pouvoir de me procurer, ni de faire faire de pareilles expériences et de telles recherches: privé de ces ressources, nous devons nous contenter d'appliquer les seuls moyens que nous possédons au service de l'État et aux progrès de la science.

128. Voici quelques principes théoriques utiles à rappeler; on les doit au professeur Robison. Des boulets d'égale densité, projetés sous le même angle d'élévation, et avec des vitesses proportionnelles aux racines carrées de leurs diamètres, décrivent des courbes semblables. En effet les résistances seront proportionnelles aux quantités de mouvemens; car la résistance r

est à peu près exprimable par $d^2 v^{204}$; d représente le diamètre et v la vitesse; mais v étant comme $\sqrt{d}$, v^2 sera comme d , par conséquent $v^2 d^2$ sera comme d^3 , c'est-à-dire que r est comme d^3 ; mais la masse est également proportionnelle à d^3 , cube du diamètre. Par conséquent la résistance est proportionnelle à la masse, quand la vitesse est comme la racine carrée du diamètre du boulet. Ainsi, dans ce cas, la vitesse horizontale au sommet de la courbe sera proportionnelle à la vitesse finale limite. De même les portées, les hauteurs, et toutes les autres lignes homologues dans la courbe, seront proportionnelles au diamètre du boulet. Ce principe est d'une très grande utilité; car, par le moyen d'une série d'expériences convenables à une espèce de boulet projeté avec des vitesses et à des élévations différentes, on pourra construire une table pour trouver les circonstances des mouvemens pour des données semblables et une autre espèce de boulet.

129. La table suivante, déduite en partie de l'expérience et en partie de la théorie, peut servir, par analogie, dans beaucoup d'autres cas.

Table des portées d'un boulet de 24 projeté sous un angle de 45°.

VITESSE par seconde.	PORTÉE dans le vide.	PORTÉE dans l'air.	PORTÉE corrigée.	HAUTEUR à laquelle s'est élevé le boulet.
pieds.	yards.	yards.	yards.	yards.
200	415	320	330	100
400	1658	1000	1019	300
600	3731	1391	1419	400
800	6632	1687	1719	464
1000	10362	1840	1878	515
1200	14922	1934	1978	561
1400	20310	2078	2129	606
1600	26528	2206	2264	650
1800	33574	2326	2391	694
2000	41450	2438	2510	738
2200	50155	2542	2622	778
2400	59688	2640	2726	816
2600	70050	2734	2823	852
2800	81241	2827	2916	887
3000	93262	2915	3002	922
3200	106111	2995	3086	996
1	2	3	4	5

La première colonne contient les vitesses, exprimées en pieds, d'un boulet de 24, projeté sous un angle de 45°. La seconde colonne indique les portées que le boulet aurait dans le vide, sur un plan horizontal. La troisième colonne renferme les amplitudes lorsque l'air est considéré comme ayant partout la même densité qu'à la surface de la terre. La quatrième colonne montre les corrections que nécessite la diminution de la densité de l'air dans le mouvement ascendant du boulet, ce qui donne les amplitudes corrigées. Enfin la cinquième ou dernière colonne indique la hauteur à laquelle le boulet s'élève dans l'air, ou la hauteur du sommet de la courbe au-dessus de l'horizon.

130. On peut juger, par cette table, de la différence énorme qu'il y a entre le mouvement à travers l'air et celui qui a lieu à travers le vide, principalement pour de grandes vitesses. On voit que les portées dans l'air, au lieu d'augmenter dans le rapport double des vitesses initiales, ainsi que cela a lieu dans le vide, augmentent réellement dans un rapport beaucoup moindre que les vitesses dans tous les cas actuels du service militaire; et que dans les vitesses les plus usitées, qui sont depuis 800 jusqu'à 1600 pieds, les portées n'augmentent à peu près que dans le rapport des racines carrées des vitesses. Une série de semblables tables, faites avec le même boulet et sous d'autres angles d'élévation, compléterait à peu près ce que peut donner la théorie, aussi bien que ce qui serait le plus utile et le plus nécessaire dans la pratique.

Usage de la table précédente.

131. Supposons qu'il s'agisse de trouver les dimensions de la courbe décrite par un boulet de 12 (11^{lb} 5^{on} de France), lancé avec une vitesse de 1600 pieds (1) par seconde, et à une élévation de 45°.

En se rappelant ici que les trajectoires sont semblables, et que leurs lignes homologues sont proportionnelles aux diamètres des boulets quand ils sont lancés avec des vitesses qui sont entre elles comme les racines carrées des mêmes diamètres, nous devons d'abord chercher quelle vitesse du boulet de 24^{lb} répond à la vitesse 1600 pieds du boulet de 12^{lb}. Les diamètres des deux boulets étant 4,403, et 5,546, on aura

$$\sqrt{4,403} : \sqrt{5,546} :: 1600 : 1796,$$

(1) Environ 1500 pieds de France.

pour les vitesses correspondantes du boulet de 24^{lb}. Cette vitesse étant cherchée dans la table (§ 129), on trouve que la portée et la hauteur qui y répondent sont 2386 et 692; donc $5,546 : 4,403 :: 2386 : 1894$ yards pour la portée, et $5,546 : 4,403 :: 692 : 549$ yards pour la hauteur, c'est-à-dire que la portée est environ $1 \frac{1}{2}$ mille (1), et la hauteur environ $\frac{1}{3}$ de mille (2).

132. Trouver la portée et la plus grande élévation d'un boulet de 9^{lb}, projeté avec une vitesse de 1500 pieds. Le diamètre d'un boulet de 9^{lb} étant de 4 pouces, nous aurons $\sqrt{4} : \sqrt{5,546} :: 1500 : 1760$, auquel nombre correspondent dans la table 2343, et 680 pour la portée et la hauteur; donc

$$5,546 : 4 :: \begin{cases} 2343 : 1690 \text{ yards la portée} = 1 \text{ mille environ} \\ 680 : 491 \text{ la hauteur} = \frac{1}{3} \text{ mille.} \end{cases}$$

133. La même table peut aussi servir à calculer les amplitudes des bombes. Pour cela il nous faut seulement trouver quelle doit être la vitesse initiale d'un boulet de 24^{lb}, correspondante à la vitesse donnée de la bombe; ce qu'on pourra déduire du diamètre et du poids de la bombe, en prenant cette vitesse telle que le rapport du poids du boulet à la résistance soit le même que pour la bombe, et d'après le procédé exposé dans le quinzième problème (§ 123).

Cherchons donc la portée d'une bombe de 13 pouces, lancée avec une vitesse de 2000 pieds, et sous un angle d'élévation de 45°; dans ce cas le diamètre étant 12,8, nous aurons $\sqrt{12,8} : \sqrt{5,546} :: 2000 : 1317$, ensuite $178 : 149,4 :: 1317 : 1105$ (3), vitesse correspondante du boulet de 24^{lb}. A ce nombre correspond dans la table une portée de 1930 yards; donc $5,546 : 12,8 :: 1930 : 4455$ yards, ou environ 2 milles $\frac{1}{2}$ pour la portée.

PROBLÈME 17.

Déterminer les pénétrations des boulets dans différentes substances.

134. Les pénétrations des boulets dans différens blocs de bois forment un objet particulier de recherches dans les expériences du pendule balistique.

(1) Environ $1 \frac{3}{4}$ kilomètre, ou 900 toises.

(2) Environ 0,53 kilomètre, ou 270 toises.

(3) Voyez § 123.

Quand un corps en mouvement vient frapper un obstacle immobile, ou bien le premier recule, ou il pénètre dans le dernier, jusqu'à ce que son mouvement soit détruit. Le recul a lieu quand le corps est doué d'élasticité; et cela arrivera toujours quand l'élasticité sera parfaite, c'est-à-dire quand les corps posséderont le pouvoir de reprendre complètement la forme qu'ils avaient avant le choc, et qui avait été changée pendant ce choc. Souvent le recul aura également lieu quand l'élasticité sera imparfaite ou seulement partielle, et que la vitesse et la force du corps choquant ne seront pas suffisantes pour vaincre la force de cohésion de l'obstacle, et ne pourra à cause de cela pénétrer ou se loger dans le corps choqué. Quand le corps et l'obstacle sont entièrement dépourvus de cette faculté élastique, le corps pénétrera dans l'obstacle, jusqu'à ce que son mouvement soit détruit, et il y demeurera: tel serait un corps qui tomberait dans une masse de terre molle. Dans les deux cas, d'élasticité et de non élasticité, le boulet fera une impression sur le corps choqué: dans le premier cas, le corps reprendra sa forme primitive, et dans l'autre cas l'impression sera stable; ce qui constitue la différence entre les corps élastiques et non élastiques.

135. Mais entre ces deux espèces de corps, il y en a une infinité d'autres qui possèdent à différens degrés le pouvoir de reprendre leur forme primitive: l'on peut même affirmer avec certitude que dans la nature, il n'existe aucun corps doué d'une élasticité parfaite ou qui en soit totalement privé. Quelque élastique que nous paraisse un corps, il conserve néanmoins toujours une petite marque à l'endroit où le choc a eu lieu. De même on n'a encore découvert aucun corps qui, après avoir été frappé, ne tende tant soit peu à revenir à son premier état. Pour l'objet que nous avons en vue, nous considérerons seulement la cavité qui se forme lorsque deux corps se choquent, cavité qui a toujours lieu, que les corps soient élastiques ou non; et dans cette vue il est indifférent que la cavité reste ou qu'elle se referme en tout ou en partie. Il est clair, d'après l'expérience, que si un boulet est chassé contre un obstacle, tel qu'un banc de terre, un rempart, un bloc de bois, le boulet s'y logera sans qu'il y ait de recul sensible; en sorte que dans les considérations suivantes, si le corps est élastique, on n'aura pas besoin d'y avoir égard.

136. Quand un boulet est lancé contre un tel obstacle, non-seulement il y fait une impression, mais il pénètre dans son intérieur jusqu'à une certaine profondeur. Et cet effet ne peut avoir lieu sans que le boulet éprouve une grande résistance de la part de l'obstacle, sans que son

mouvement ne soit graduellement affaibli et qu'il ne le perde enfin totalement. Pour trouver la profondeur à laquelle le boulet peut pénétrer, il faut déterminer la résistance qu'il éprouve pendant qu'il s'enfonce dans l'obstacle. Or, quelle que soit la matière dont l'obstacle est composé, un plus grand enfoncement exigera toujours une plus grande force; et puisque l'élasticité n'est pas considérable, le boulet éprouvera à peu près la même résistance après être entré à une certaine profondeur qu'au commencement de la pénétration, excepté les cas où la pénétration devenant considérable, la résistance augmentera à cause de la condensation et de l'accumulation des parties du corps choqué refoulées devant le corps choquant. La résistance est par conséquent à peu près une force constante et uniforme qui ne dépend d'aucune manière de la vitesse; ainsi elle peut être assimilée à l'action de la gravité qui agit sur un corps lancé verticalement, de manière à lui faire perdre des quantités égales de son mouvement dans des temps égaux, quelle que soit la vitesse avec laquelle il ait été lancé. La grandeur de cette résistance dépend de la force de cohésion de l'obstacle et de la largeur de la cavité formée par le boulet, largeur qui est proportionnelle au carré du diamètre. Ainsi les calculs pour les circonstances de ce mouvement seront les mêmes que ceux de la résistance qu'oppose la gravité à un corps lancé verticalement, ou ceux d'un mouvement quelconque retardé par une force constante.

137. Soit donc f la résistance constante ou la force retardatrice qu'oppose le bois ou toute autre matière, s la pénétration ou la quantité dont s'enfonce le boulet, v la vitesse initiale, et t le temps de la pénétration, $g = 16 \frac{1}{12}$ ou 16 environ, ou l'espace qu'un grave décrit dans la première seconde de sa chute; alors on aura par la théorie des forces accélératrices constantes, $f = \frac{v^2}{4gs}$ et $t = \frac{2s}{v}$.

138. Or j'ai trouvé, en prenant la moyenne de plusieurs expériences, qu'un boulet de fer de fonte de 1,96 pouce de diamètre, lancé contre l'extrémité d'un bloc de bois d'orme, ou dans la direction des fibres, avec une vitesse de 1600 pieds par seconde, s'enfonçait de 20 pouces dans le bloc; il s'agit donc de déterminer le temps de la pénétration et la force ou la résistance d'un bois, comparée à la gravité, dans la supposition toujours que cette première force est une quantité constante.

Dans ce cas nous avons $v = 1600$ pieds et $s = 20$ pouces $= \frac{5}{3}$ de pied; donc $t = \frac{2s}{v} = \frac{10}{3 \times 1600} = \frac{1}{480}$ de seconde, qui est le temps de la péné-

tration totale; ensuite $f = \frac{v^2}{4gs} = \frac{1600^2}{4 \times 16 \times \frac{20}{12}} = 24000$; c'est-à-dire que la résistance du bois est à la gravité comme 24000 : 1.

139. 2^e Exemple. Le même boulet, avec une vitesse de 1200 pieds, a pénétré de 15 pouces. Donc $f = \frac{v^2}{64s} = \frac{1200^2}{64 \times \frac{15}{12}} = 18000$, pour la force du bois, et $t = \frac{2s}{v} = \frac{\frac{50}{12}}{1200} = \frac{1}{480}$, le même que ci-dessus.

140. 3^e Exemple. Un boulet de 3 livres, lancé avec une vitesse de 1500 pieds, a pénétré de 30 pouces; ainsi $f = \frac{1500^2}{64 \times \frac{30}{12}} = 14062$ pour la force du bois, et $t = \frac{\frac{30}{6}}{1500} = \frac{5}{1500} = \frac{1}{300}$.

141. 4^e Exemple. Le dernier boulet, lancé avec une vitesse de 1060 pieds, s'est enfoncé de 16 pouces; ainsi $f = \frac{1060^2}{64 \times \frac{16}{12}} = 13200$ pour la force, et $t = \frac{\frac{16}{6}}{1060} = \frac{1}{393}$ pour le temps.

142. Dans ces quatre exemples, les résultats sont variables, tant pour la force du bois que pour le temps de la pénétration, quoique les données d'après lesquelles ils ont été calculés soient les moyennes de différentes expériences. Cela tient sans doute à différentes circonstances inévitables, telles que l'irrégularité dans les diverses expériences, la différence dans les blocs, la résistance des bois qui n'est pas une quantité absolument constante, et ajoutez à cela le refoulement des fibres, occasionné par le mouvement progressif du boulet. Dans cette incertitude, nous prendrons la moyenne des quatre résultats, tant pour la force du bois que pour le temps de la pénétration.

Valeurs de f .Valeurs de t .

24000

480

18000

480

14062

300

13200

398

69262

1658

Moyenne ou $f = 17315$.Moyenne ou $t = \frac{1}{415}$.

Ainsi les moyennes de ces quatre expériences donnent $\frac{1}{415}$ pour le temps de la pénétration, et 17315 pour la force du bois : c'est-à-dire que la résistance est à la gravité comme 17315 est à 1.

143. On peut encore faire le calcul d'une autre manière. Soit d le diamètre du boulet et f la force de cohésion de l'obstacle; ainsi $d^2 f$ sera proportionnelle à la résistance. Soit cette résistance exprimée par une colonne d'eau de même diamètre d que le boulet, et ayant f pour hauteur, sa pesanteur spécifique étant 1; et désignons par n la pesanteur spécifique de la matière du boulet qui, dans le cas présent, sera $7\frac{1}{2}$ environ; et $a = 0,7854$; ad^2 sera alors l'aire d'un grand cercle, et $\frac{2}{3}and^3$ le poids du boulet. Ainsi la résistance sera au poids du boulet comme $ad^2 f$ est à $\frac{2}{3}and^3$, ou comme f est à $\frac{2}{3}nd$, ou comme $\frac{3f}{2nd}$ est à 1, la gravité. Maintenant la vitesse engendrée ou détruite par la gravité pendant que le corps décrit l'espace s est $8\sqrt{s}$ que l'on trouve par la proportion $\sqrt{16} : \sqrt{s} :: 32 : 8\sqrt{s}$; et quand l'espace est le même, les vitesses produites ou détruites, sont comme les racines carrées des forces, ou les forces sont comme les carrés des vitesses; et la vitesse détruite par la force $\frac{3f}{2nd}$ étant v , on aura

$$1 : \frac{3f}{2nd} :: 64s : v^2, \text{ d'où } \frac{3f}{2nd} = \frac{v^2}{64s},$$

par conséquent

$$f = \frac{nd}{3} \times \frac{v^2}{32s}, \text{ et } s = \frac{ndv^2}{96f} (1).$$

Autre manière.

144. Puisque la résistance est $\frac{3f}{2nd}$, la gravité étant 1, on aura

$$v dv = - \frac{3fg}{nd} ds,$$

et en intégrant $V^2 = v^2 - \frac{dfgs}{nd}$, et quand $V = 0$, ou quand le mouvement cesse $v^2 = \frac{6fgs}{nd}$, d'où $f = \frac{ndv^2}{96s}$, et $s = \frac{ndv^2}{96f}$, comme ci-dessus.

(1) La quantité $\frac{3f}{2nd}$ est la même que celle qui est exprimée par f dans le n° précédent.

Ici il s'agit d'une résistance variable avec la densité et le diamètre, comparable à un poids, tandis que plus haut f désigne une force retardatrice constante comparable à la gravité. Il est nécessaire d'établir une distinction entre ces deux espèces de forces. Voyez à ce sujet une observation faite par M. le chef de bataillon Augoyat, dans son intéressant Mémoire sur la pénétration, inséré au Mémorial du Génie, n° 7, page 90.

145. On voit par là que la profondeur de la pénétration est proportionnelle au produit de la densité par le calibre et le carré de la vitesse divisé par la force de l'obstacle; en sorte que si des boulets d'égal diamètre sont lancés contre un obstacle ou un bloc, les cavités faites par ces boulets seront comme les carrés des vitesses, ce qui s'accorde assez bien avec l'expérience.

146. Il suit aussi de là que si des boulets inégaux, mais de même densité, sont projetés avec des vitesses égales contre un obstacle, les profondeurs des cavités seront proportionnelles aux diamètres des boulets; en sorte qu'un plus grand boulet fera non-seulement une ouverture plus large, mais s'enfoncera plus profondément qu'un boulet plus petit, tout le reste étant d'ailleurs égal de part et d'autre. De même, si l'on connaît par expérience la profondeur de la cavité que fait dans un corps un boulet donné, se mouvant avec une vitesse connue, on pourra en conclure la valeur de f , qui désigne la force ou la cohésion de la matière dont l'obstacle est composé; et de cette manière nous pourrons, par l'expérience, comparer entre elles les forces de plusieurs matières différentes. Pour éclaircir ceci, nous allons rapporter plusieurs exemples.

147. Prenons le même exemple que dans l'article 138; nous aurons, d'après la formule,

$$f = \frac{ndv^2}{96s} = \frac{7\frac{1}{2}dv^2}{96s} = \frac{5dv^2}{64s} \text{ et } \frac{5dv^2}{64f}$$

pour la valeur de s . Or on a ici $d = 1,96 = 2$, à peu près; $v = 1600$, et $s = 20$; par conséquent $\frac{5dv^2}{64s} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1600^2}{64 \cdot 20} = \frac{200^2}{2} = 20000$ pour la valeur de f , calculée d'après cette règle.

148. 2° Exemple. De la même manière, si nous prenons le second exemple de l'article, il viendra $d = 2$, $v = 12$, $s = 15$; donc $\frac{5 \cdot 2 \cdot 1200^2}{64 \cdot 20} = \frac{45030}{3} = 1500 = f$.

149. 3° Exemple. Pour le troisième exemple de l'article 140, on a $d = 2,78$ ou 2,8 environ $v = 1500$, et $s = 30$; donc

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1500^2}{64 \cdot 30} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 1500^2}{83} = 16406 \text{ pour la valeur de } f.$$

150. Enfin pour le quatrième exemple de l'article 141, on a $d = 2,8$, $v = 1060$ et $s = 16$; il vient donc $\frac{5 \cdot 2,8 \cdot 1060^2}{8^2 \cdot 16} = \frac{14 \cdot 265^2}{8^2} = \frac{7 \cdot 265^2}{32} = 15362$ pour la valeur de f dans ce cas.

151. Prenant une moyenne entre ces quatre résultats

20000

15000

16406

15362

 66768 {4

on a 16692 pour f , moyenne qui diffère peu de 17315, trouvée ci-dessus (1).

152. *Exemple 5.* Déterminer à quelle profondeur un boulet de 24, lancé avec une vitesse de 1600 pieds par seconde, pénétrera dans un bloc d'orme.

Puisque, d'après l'article 139, un boulet de 2 pouces de diamètre, projeté avec une vitesse de 1200 pieds, s'enfonce de 15 pouces; il suit, d'après l'article 141, que pour trouver la profondeur à laquelle pénétrera un boulet de 24th, et dont le diamètre est par conséquent de 5,55 pouces, et qui est lancé avec une vitesse de 1600 pieds, il faut faire la proportion $2 \times 1200^2 : 5,55 \times 1600^2 :: 15 : \frac{5,55 \times 1600^2 \times 15}{2 \times 1200^2} = 37$ (2) pouces environ ou 3 pieds 1 pouce.

153. *Exemple 6.* M. Robins a trouvé (*volume 1^{er}, page 273 de ses Œuvres*) qu'un boulet de 18th, lancé avec une vitesse de 1200 pieds par seconde, s'enfonçait de 34 pouces dans un bloc de bon bois de chêne bien sec. De là on peut déduire la force comparative ou la solidité du chêne et de l'orme. D'après l'article 140, la résistance de l'obstacle étant directement proportionnelle au diamètre du boulet et au carré de la vitesse, et inversement à l'espace pénétré; et le diamètre du boulet de 18th étant de 5,04 pouces, nous aurons

$$\frac{f}{F} = \frac{dv^2S}{DV^2s} = \frac{2 \cdot 12^2 \cdot 34}{5,04 \cdot 12^2 \cdot 15} = \frac{2 \cdot 34}{5,04 \cdot 15} = \frac{17}{19};$$

(1) Cet accord est fortuit, et provient de ce que d variant peu dans les exemples choisis, les moyennes sont à peu près les mêmes que sur les diverses valeurs de f (§ 141), et sur celles de $\frac{3f}{2nd}$ (§ 142).

(2) Il faut lire 74 pouces : cette erreur de calcul a été découverte par M. Augoyat, dans le Mémoire précité.

à peu près; ainsi l'orme oppose une plus petite résistance que le chêne dans le rapport de 17 à 19.

155. *Exemple 7°.* Un boulet de 24, lancé contre un banc de terre assez dure, avec une vitesse de 1300 pieds par seconde, s'y est enfoncé de 15 pieds; il s'agit de trouver le rapport de la résistance de cette terre à celle de l'orme. En comparant les nombres ci-dessus avec ceux du cinquième exemple, on aura

$$\frac{f}{F} = \frac{v^2 s}{VS} = \frac{16^2 \cdot 15 \cdot 12}{13^2 \times 37} = \frac{256 \times 180}{13^2 \times 37} = \frac{46080}{6253} = 7 \frac{1}{3} \text{ environ.}$$

Ainsi l'orme a une résistance $7 \frac{1}{3}$ fois plus grande que la terre (1).

156. *Exemple 8°.* Déterminer la profondeur à laquelle pénétrera, dans l'orme sec, une balle de plomb de $\frac{3}{4}$ de pouces de diamètre, en supposant qu'il est lancé avec une vitesse de 1700 pieds par seconde, et que le plomb ne change pas de forme par son choc contre le bois. Ici $D = \frac{3}{4}$, $N = 11 \frac{1}{3}$, pesanteur spécifique du plomb, et $n = 7 \frac{1}{3}$ environ, celle du fer fondu; donc $\frac{DNV^2S}{dnv^2} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 11 \frac{1}{3} \times 17^2 \times 20}{2 \times 7 \frac{1}{3} \times 16^2} = \frac{17^2 \times 30}{16^2 \times 44} = 13$ pouces à peu près, pour la profondeur de la pénétration.

Mais M. Robins trouva par expérience que la pénétration n'était que de 5 pouces; il suit de là, que le bois de son bloc opposait une résistance plus que double de celui que j'ai employé, ou, ce qui est plus probable, le défaut d'enfoncement vient du changement de figure de la balle de plomb par son choc contre le bois; car on a observé de ces balles qui étaient entièrement aplaties par le choc.

157. *Exemple 9°.* Ayant trouvé qu'un boulet d'une livre, projeté avec une vitesse de 1200 pieds par seconde, s'enfoncé de 15 pouces dans du bois d'orme, on demande de trouver le temps qu'emploie le boulet à parcourir chacun des 15 pouces, et la vitesse qu'il perd à chacun d'eux, la résistance des bois étant supposée constante et uniforme. Dans ce cas la vitesse $v = 1200$ pieds $= 1200 \times 12 = 14400$ pouces; or les vitesses et les temps sont comme les racines carrées des espaces, d'après la théorie des forces retardatrices ou accélératrices; et $t = \frac{15}{v} = \frac{2 \times 15}{12 \times 1200} = \frac{30}{14400} = \frac{1}{480}$ de seconde pour le temps du passage à travers les 15 pouces; par conséquent

(1) Il faut remplacer au dénominateur 37 par son double 74. (Voyez la note du n° 152). Cette rectification faite, le rapport de la résistance devient la moitié de $7 \frac{1}{3}$ ou $3 \frac{2}{3}$.

$$\sqrt{15} : \sqrt{15} - \sqrt{14} :: v :$$

Vitesses perdues.

Temps employé à parcourir le

$$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{14}}{\sqrt{15}} v = 40,7 :: t : \frac{\sqrt{15} - \sqrt{14}}{\sqrt{15}} = 0,00007. 1^{\text{er}} \text{ pouce.}$$

$$\frac{\sqrt{14} - \sqrt{13}}{\sqrt{15}} v = 42,2 \quad \frac{\sqrt{14} - \sqrt{13}}{\sqrt{15}} = 0,00007. 2^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{\sqrt{15}} v = 43,8 \quad \frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{\sqrt{15}} = 0,00008. 3^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{11}}{\sqrt{15}} v = 45,7 \quad \frac{\sqrt{12} - \sqrt{11}}{\sqrt{15}} = 0,00008. 4^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{15}} v = 47,8 \quad \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{15}} = 0,00008. 5^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\sqrt{15}} v = 50,3 \quad \frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\sqrt{15}} = 0,00009. 6^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{9} - \sqrt{8}}{\sqrt{15}} v = 53,2 \quad \frac{\sqrt{9} - \sqrt{8}}{\sqrt{15}} = 0,00009. 7^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\sqrt{15}} v = 56,6 \quad \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\sqrt{15}} = 0,00010. 8^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{15}} v = 60,8 \quad \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{15}} = 0,00011. 9^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{\sqrt{15}} v = 66,1 \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{\sqrt{15}} = 0,00012. 10^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{15}} v = 73,2 \quad \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{15}} = 0,00013. 11^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}} v = 83,0 \quad \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}} = 0,00014. 12^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{15}} v = 98,5 \quad \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{15}} = 0,00017. 13^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{15}} v = 128,3 \quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{15}} = 0,00022. 14^{\text{e}}$$

$$\frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{\sqrt{15}} v = 309,8 \quad \frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{\sqrt{15}} = 0,00054. 15^{\text{e}}$$

Somme 1200P

Somme = 0,00208" = $\frac{1}{480}$ seconde.

On voit par là que dans les premiers instans il se perd peu de vitesse.

Par conséquent la vitesse communiquée à un corps, telle qu'une planche d'un pouce d'épaisseur, et qui est traversée par une balle, est aussi très petite. Cela explique pourquoi une planche, placée verticalement, n'est quelquefois pas renversée par une balle qui la traverse.

PROBLÈME 18.

158. Déterminer les circonstances du mouvement d'un boulet qui se meut avec une vitesse donnée, et qui frappe un bloc mobile de bois ou de toute autre substance.

Supposons que la direction du boulet passe par le centre de gravité du bloc, et que lorsque le bloc aura parcouru l'espace s par l'effet du choc, le boulet y ait pénétré à une profondeur x .

Soient

B = la masse du bloc,

b = *idem* du boulet,

s = l'espace parcouru par le bloc,

x = la profondeur de la pénétration, et par conséquent

$s + x$ = l'espace décrit par le boulet;

a = la vitesse initiale du boulet à l'instant du choc,

v = la vitesse du boulet lorsqu'il a décrit $s + x$,

u = la vitesse du bloc au même instant,

t = le temps de la pénétration ou du mouvement,

r = la résistance du bois,

$\frac{r}{B}$ sera la force accélératrice du bloc, et

$\frac{r}{b}$ la force retardatrice du boulet.

Puisque la quantité de mouvement communiquée au bloc est égale à celle que perd le boulet, on a $Bdu = -bdv$, et par conséquent.....
 $Bu = -bv + C$; mais quand $v = a$, $u = 0$; donc $Bu = b(a - v)$, et lorsque le boulet est parvenu à sa plus grande profondeur, ou quand $u = v$, cette formule devient $Bu = b(a - u)$ ou $ab = (B + b)u$; ainsi la quantité de mouvement avant le choc est égale à celle qui a lieu après le choc, et la vitesse imprimée est indépendante de la résistance r du bois.

Maintenant, par la théorie des forces accélératrices, on a

$$u^2 = \frac{4grs}{B} \text{ et } -v^2 = \frac{4gr}{b} \times (s+x) + C,$$

ou, en déterminant la constante,

$$a^2 - v^2 = \frac{4gr}{b}(s+x);$$

de là on tire $x = \frac{b(a^2 - v^2) - 4grs}{4gr}$, et quand $v = u$, en substituant u pour v et Bu^2 pour $4grs$, la plus grande pénétration devient $\frac{ba^2 - (B-b)u^2}{4gr}$; écrivant ensuite ab au lieu de $(B+b)u$, la plus grande pénétration... $x = \frac{Bba^2}{4gr(B+b)} = \frac{ba^2}{4gr} \times \frac{b}{B+b}$, égal à $\frac{ba^2}{4gr}$ quand le bloc est fixe ou infiniment grand, ou quand B est très grand relativement à b ; donc

$$s+x = \frac{a^2 - u^2}{4gr} b = \frac{a^2 \frac{a^2 b^2}{(B+b)^2}}{4gr} = b \frac{B^2 + 2Bb}{(B+b)^2} \times \frac{a^2 b}{4gr},$$

et par conséquent

$$B+b : b :: x : s, \text{ d'où } s = \frac{bx}{B+b} = \frac{Bb^2 a^2}{4gr(B+b)^2}.$$

159. Si le boulet est de fer et du poids d'une livre, et s'il se meut avec une vitesse de 1200 pieds par seconde, il s'enfoncera de 15 pouces dans un bloc de bois d'orme; ainsi dans ce cas

$$\frac{r}{b} = \frac{a^2}{4gr} = \frac{1200^2}{4 \times 16 \times \frac{15}{12}} = \frac{300^2}{5} = 18000 \text{ environ.}$$

Si $B = 400^{\text{lb}}$ et $b = 1$; alors $u = \frac{ab}{B+b} = \frac{1200}{401} = 3$ pieds environ par seconde pour la vitesse du bloc.

$s = \frac{Bu^2}{4gr} = \frac{400 \times 9}{4 \times 16 \times 18000} = \frac{1}{320}$ de pieds ou $\frac{3}{80}$ de pouce pour l'espace décrit par le bloc, lorsque le boulet est parvenu à sa plus grande profondeur. $t = \frac{25}{u} = \frac{2}{320 \times 3} = \frac{1}{480}$ de seconde; ou

$$t = \frac{25 + 2x}{v} = \frac{\frac{2}{320} + \frac{30}{12}}{1200} = \frac{1 + 400}{1200 \cdot 1600} = \frac{1}{480} \text{ environ,}$$

pour le temps de la pénétration.

PROBLÈME 19.

160. Déterminer les circonstances du mouvement relatives à un boulet donné, lancé avec une charge de poudre donnée.

Soient

a = l'espace occupé d'abord par la charge de la poudre,
 b = toute la longueur de l'âme de la pièce,
 $c = 0,7854$ la surface du cercle dont le diamètre est 1,
 d = le diamètre du boulet ou de l'âme,
 e = la pesanteur spécifique du boulet ou le poids d'un pied cube,
 $g = 16 \frac{1}{2}$ l'espace décrit par la chute d'un corps dans la première seconde,
 $m = 230$ onces la pression atmosphérique sur un pouce carré,
 n à 1 le rapport de la force initiale de la poudre enflammée à la pression de l'atmosphère,
 w = le poids du boulet, et soit
 x = la distance variable du boulet au fond de l'âme.

Alors on aura d'abord cd^2 = l'aire du grand cercle du boulet, ensuite mcd^2 = la pression de l'atmosphère sur ce cercle; par conséquent $mncd^2$ = l'action de la poudre sur ce même cercle.

Mais la force de la poudre enflammée est supposée ordinairement proportionnelle à sa densité, et la densité est en raison inverse de l'espace que remplit le gaz, donc l'action initiale de la poudre enflammée sur le boulet est à sa force en x , comme $x : a$, ou bien $x : a :: mncd^2 : \frac{mnacd^2}{x} = F$ force

motrice en x ; donc $\frac{F}{w} = \frac{mnacd^2}{wx} = f$ force accélératrice. Mettant cette valeur dans l'équation $v dv = 2g f dx$, il vient $v dv = \frac{2gmnacd^2}{w} \cdot \frac{dx}{x}$, et en

intégrant $v^2 = \frac{4gmnacd^2}{w} \log x + C$; mais quand $v = 0$, $x = a$; donc $v^2 = \frac{4gmnacd^2}{w} \log \frac{x}{a}$. De là on tire $v = \sqrt{\left(\frac{4gmnacd^2}{w} \times \log \frac{x}{a} \right)}$ pour la vi-

tesse du boulet en c ; ou $v = \sqrt{\left(\frac{4gmnacd^2}{w} \times \log \frac{b}{a} \right)}$ pour sa vitesse, lorsqu'il sort de la bouche du canon. h représente ici la partie du cy-

lindre remplie de poudre; a étant la longueur d'âme qui se trouve derrière le boulet, et qui est plus grande que h quand le boulet ne touche pas immédiatement la poudre.

Mais le volume du boulet étant $\frac{2}{3}cd^3$, son poids sera $\frac{2}{3}cd^3e$; donc

$$\sqrt{\frac{4gmnhcd^3}{w}} = \sqrt{\frac{6gmnh}{de}} = \sqrt{\frac{96.230.144nh}{de}} = 1783 \sqrt{\frac{nh}{de}},$$

par conséquent

$$v = 1783 \sqrt{\left(\frac{nh}{de} \log \text{hyp.} \frac{b}{a}\right)} = 2706 \sqrt{\left(\frac{nh}{de} \log \frac{b}{a}\right)}.$$

Si le boulet est de fer fondu $e = 7400$, et la formule donne

$$v = 31,45 \sqrt{\left(\frac{nh}{d} \log \frac{b}{a}\right)},$$

si le boulet est de plomb, alors $e = 11325$, et $v = 25,42 \sqrt{\frac{nh}{d} \log \frac{b}{a}}$ pour la vitesse du boulet de plomb. Dans ces deux formules, les quantités a, b, d, h , peuvent être rapportées à une mesure quelconque en pieds ou en pouces.

161. On a trouvé que la vitesse moyenne de la pièce n° 2, chargée avec 4 onces de poudre, était à peu près de 1180 pieds par seconde, maintenant le diamètre du boulet étant 1,96 pouces, et la charge de poudre avec la gargousse occupant 3,45 pouces du cylindre, tandis que seule elle n'occupe que 2,54; les valeurs numériques des lettres qui entrent dans la formule $v = 31,45 \sqrt{\left(\frac{nh}{d} \log \text{hyp.} \frac{b}{a}\right)}$ seront $a = 3,45$, $b = 38,43$, $d = 1,96$, $h = 2,54$. Si, d'après M. Robins, nous supposons $n = 1000$, la substitution de ces nombres donne $v = 1159$, ce qui est trop petit d'environ 21 pieds.

162. Telle est donc la solution du problème dans son plus grand état de simplicité; v la vitesse, et n la force initiale de la poudre, sont les quantités inconnues qu'il faut déterminer; mais dans cette solution on a omis différentes circonstances qui doivent diminuer la vitesse du boulet. Prises séparément, ces circonstances sont de peu d'importance, mais en somme leur effet est trop considérable pour pouvoir être entièrement négligé. La première est la contre-pression de l'air extérieur, qui doit être prise en considération; car tant que le boulet se meut dans l'âme de la pièce, il

est poussé en arrière et son mouvement est retardé par la pression de l'air qui se trouve devant lui. Cette pression est égale à une colonne de mercure de 30 pouces de hauteur, ou à mcd^2 , comme on l'a déjà dit ci-dessus; cette force retardatrice est au poids du boulet, comme $1 : \frac{mcd^2}{w}$; ainsi au lieu de l'équation différentielle ci-dessus, nous aurons $v dv = \frac{2gmcd^2}{w} \left(\frac{andx}{x} - dx \right)$, dont l'intégrale totale est $v^2 = \frac{4gmcd^2}{w} \times \left(a.n \times \log \text{hyp.} \frac{x}{a} + a - x \right)$, et quand $x = b$, alors $v^2 = \frac{4gmcd^2}{w} \left(an \log \frac{b}{a} + a - b \right)$ pour la vitesse avec laquelle le boulet sort de la bouche du canon.

163. En prenant le même exemple que ci-dessus, et en faisant le calcul par cette formule, le résultat sera trop faible de $\frac{1}{366}$, ou de 8 pieds environ, ce qui est trop peu considérable pour qu'on y fasse attention. Si nous tenions également compte de l'effet de l'air devant le boulet, et qui est condensé par la pression de l'atmosphère, on trouverait probablement une valeur exacte ou un peu plus grande; en sorte qu'on peut à peu près estimer l'erreur qui vient de ces deux causes à $\frac{1}{182}$ du tout.

164. Outre les deux causes mentionnées ci-dessus, il y en a encore d'autres qui diminuent la vitesse: tel est le frottement du boulet contre les parois de l'âme. Il est vrai que cet effet est faible, mais quel qu'il soit, il ne paraît pas qu'on puisse le soumettre à un calcul rigoureux. Une autre cause de diminution est la perte de force occasionnée par le fluide élastique qui s'échappe par le vent du boulet et par la lumière de la pièce. Cette perte est considérable, parce que le fluide sort et par la lumière et par-dessus le boulet avec sa vitesse entière qui est bien plus grande que celle du boulet lui-même. Quelques personnes pensent que la perte de vitesse due à cette cause pourrait se déduire de la dernière partie de nos expériences; mais le calcul exact de cette diminution doit être différé, jusqu'à ce que nous ayons déterminé avec quelle vitesse se meut la poudre enflammée.

165. L'inflammation successive de la poudre est une autre cause d'affaiblissement dans la vitesse; de sorte que la force du gaz dégagé est employée encore à mouvoir cette partie de la charge de poudre non encore enflammée. La solution du problème suppose que toute la poudre s'enflamme instantanément; mais quoique le temps qu'elle y met soit en effet extrêmement

petit, toutefois il ne saurait être instantané; car on observe d'abord dans les fortes charges, que plusieurs grains de poudre sont rejetés hors de la pièce, sans être consumés; et ensuite la vitesse effective du boulet est beaucoup moindre qu'elle ne le serait en admettant l'instantanéité d'inflammation. Il doit donc résulter de là une diminution considérable de force qui ne peut être soumise au calcul, et qu'on ne peut estimer par aucun moyen, excepté par la différence qui existe entre les résultats donnés par la théorie, et ceux que donne l'expérience.

166. Le mouvement du gaz enflammé est plus faible vers la culasse, et il augmente toujours jusqu'au boulet, où il est le plus rapide. C'est aussi par la même raison que le fluide est plus dense et a plus de force près de la culasse; et la densité décroît jusqu'au boulet, où elle est la moindre. Outre cela, on suppose ordinairement que le gaz agit sur le boulet et le chasse avec toute sa force et toute sa vitesse, tandis qu'il n'agit sur lui qu'avec sa vitesse relative, ou avec l'excès de sa vitesse sur celle du boulet.

De toutes ces considérations il résulte que la vitesse que donne l'expérience doit être beaucoup diminuée, sans qu'on puisse établir une théorie mathématique pour évaluer cette diminution.

167. Enfin, dans le calcul, on suppose que toute la force de la poudre est employée à chasser le boulet devant elle; cependant une partie de cette force est nécessaire pour imprimer le mouvement aux grains de poudre et au fluide enflammé lui-même, partie qui doit être retranchée de l'action de la poudre sur le boulet seulement; et leur poids devra être ajouté en tout ou en partie à celui du boulet, ce qui est encore une cause de déperdition de vitesse.

168. Reprenons le calcul de la vitesse, et introduisons-y, outre le poids du boulet, celui de la charge et de la gargousse dans laquelle elle est renfermée. Le gaz remplit à chaque instant l'espace cylindrique de l'âme qui est derrière le boulet; le milieu de ce cylindre de gaz, ou à peu près son centre de gravité, se mouvra avec une vitesse moitié seulement de celle du boulet, ce qui exige la même force que celle qui est nécessaire pour mouvoir la moitié du poids de la poudre avec une vitesse égale à celle du boulet; ainsi nous n'avons qu'à substituer dans nos formules $w + p$ au lieu de w , et alors il vient

$$v = \sqrt{\left(\frac{4gmn\overline{hcd^2}}{p + w} \cdot \log h \cdot \frac{b}{a}\right)},$$

p désignant la moitié du poids de la poudre et de la gargousse.

Si l'on substitue aux lettres g , m , c , les nombres qu'elles représentent, et si l'on change les logarithmes hyperboliques en logarithmes ordinaires, la même formule devient

$$v = \sqrt{\left(\frac{2210nhd^2}{p+w} \log \frac{b}{a}\right)}, \text{ ou à peu près,}$$

$$v = 47 \sqrt{\left(\frac{nhd^2}{p+w} \log \frac{b}{a}\right)}, \text{ ou}$$

$$v = 46,7 \sqrt{\left(\frac{nhd^2}{p+w} \log \frac{b}{a}\right)}, \text{ en ayant égard à la pression de l'air.}$$

169. Comme nous avons déterminé, par de nombreuses expériences, détaillées dans le 34^e Traité, les vitesses des boulets, dans un grand nombre de circonstances, on pourra substituer quelques-unes de ces vitesses pour v , dans la formule ci-dessus, et il est évident que l'équation donnera la valeur de n , quantité inconnue qui représente la force de la poudre, les valeurs de toutes les autres lettres de la formule étant connues. Considérant donc toutes les autres quantités comme données, on tire de l'équation $n = \frac{p+w}{2180hd^2} v^2 : \log \frac{b}{a}$ la valeur générale de la force initiale du fluide élastique, la pression atmosphérique étant prise pour unité. M. Robins a trouvé 1000 pour la valeur de n ; mais quelques personnes pensent qu'elle doit être plus grande. Dans cette formule, d et h sont exprimés en pouces, v en pieds et p et w en onces.

170. Faisons maintenant des applications à quelques-unes des expériences de la fin de l'année 1786, avec les charges de 4, 8 et 16 onces de poudre, et pour les quatre pièces de différentes longueurs. Nous avons vu que le boulet employé alors avait pour diamètre 1,96 pouces et que son poids moyen était de $16^{\text{on}} 13^{\text{dr}} = 16,81$ onces. On a trouvé également que les poids des sacs contenant les charges de 4, 8, 16 onces de poudre, étaient 8 dr., 12 dr. et 1 onc. 8 dr., et les ajoutant aux poids respectifs de poudre, les sommes 4,5, 8,75, 17,31 onces seront les valeurs correspondantes de $2p$, et leurs moitiés 2,25, 4,38 et 8,66 seront les valeurs de la quantité p pour ces trois charges; en les ajoutant successivement à 16,81, poids constant du boulet, il viendra, pour les trois valeurs de $p+w$, 19,06, 21,19 et 25,47 onces. Il faut remarquer aussi que les longueurs des âmes, après avoir fait la correction nécessaire pour la chambre sphérique qui se trouve au fond de la pièce, sont 28,53, 38,43, 57,70 et 80,23; de même, les longueurs des trois charges, corrigées de la même manière, sont 3,45, 5,99 et

11,07, pour la poudre y compris le sac, et pour la poudre seulement, 2,54, 5,08 et 10,16; en sorte qu'on pourra former un tableau général des dimensions et des quantités données, ainsi que des vitesses correspondantes du boulet, comme il suit :

PIÈCES.		CHARGE DE POUDRE.			POIDS du boulet et de la charge , ou valeurs de $p+w$.	VITESSE ou valeurs de v .	FORCE initiale, ou valeurs de n .
NUMÉROS.	LONGUEURS ou valeurs de b .	POIDS en onces.	LONGUEURS ou valeurs				
			de a .	de h .			
1	28,53	4	3,45	2,54	19,06	1100	1182
		8	5,99	5,08	21,19	1340	1319
		16	11,07	10,16	25,47	1430	1531
2	38,43	4	3,45	2,54	19,06	1180	1192
		8	5,99	5,08	21,19	1480	1410
		16	11,07	10,16	25,47	1660	1526
3	57,70	4	3,45	2,54	19,06	1300	1238
		8	5,99	5,08	21,19	1790	1622
		16	11,07	10,16	25,47	2000	1670
4	80,23	4	3,45	2,54	19,06	1370	1231
		8	5,99	5,08	21,19	1940	1664
		16	11,07	10,16	25,47	2200	1684

Ainsi en calculant les valeurs de n par la formule précédente, d'après les différentes données des sept premières colonnes, on obtient ces valeurs telles qu'elles se trouvent dans la huitième ou dernière colonne.

171. On remarque ici que les valeurs de n , pour les forces initiales du fluide élastique, sont très variables pour toutes les espèces de canons et pour toutes les charges de poudre. Il est facile de découvrir les causes de cette variabilité, dont quelques-unes sont susceptibles d'être évaluées avec une suffisante exactitude; d'abord il faut considérer que les nombres de la huitième colonne ne représentent les forces initiales que dans la supposition que la poudre enflammée occupe le même espace que la poudre nue et sans gargousse; cependant il est clair que dans ces expériences le fluide

condensé de la charge occupe tout l'espace compris entre le boulet et le fond de l'âme, ou tout l'espace compris par la poudre et le sac, ce qui excède l'espace admis dans le calcul de n (surtout en employant h pour a dans les différentes longueurs des pièces dont nous avons parlé), dans le rapport du rayon de la circonférence de l'âme de la pièce à ce même rayon diminué de toute l'épaisseur de sa gargousse de flanelle. Il est évident qu'alors la force a été prise trop faible dans le même rapport. Or en pressant doucement l'une contre l'autre des pièces de flanelle, on a trouvé que l'épaisseur de chacune était moyennement la 40^e partie d'un pouce, dont le double est $\frac{1}{20}$ ou 0,05 de pouce, qui est par conséquent la quantité dont le diamètre du cercle de la poudre, sans le sac, est moindre que celui de l'âme de la pièce. Mais le diamètre de l'âme est 2,02 pouces; si l'on en ôte 0,05, le reste 1,97 est le diamètre du cylindre de poudre sans le sac; et puisque les surfaces des cercles sont comme les carrés des diamètres, et les carrés des nombres 1,97 et 2,02 étant entre eux comme 388 : 408, ou comme 97 : 102, il s'ensuit que pour cette raison les nombres trouvés ci-dessus pour n doivent être augmentés dans le même rapport, ou environ de $\frac{1}{19}$. En faisant cette correction, on formera la table suivante, pour les valeurs de n .

POUDRE.	C A N O N S.			
	1	2	3	4
onces.				
4	1244	1255	1303	1296
8	1388	1521	1797	1752
16	1612	1606	1758	1773

172. Il y a encore une autre circonstance qui fait que l'espace occupé d'abord par la poudre enflammée est plus grand que celui que l'on a admis dans les calculs précédens; cette différence provient de celle qui existe entre le volume d'une sphère et celui d'un cylindre; car l'espace que l'on suppose d'abord occupé par le fluide élastique était considéré comme ayant pour longueur celle d'un cylindre mesuré seulement depuis la partie postérieure de la surface courbe du boulet; or cet espace est évidemment trop petit de toute la différence entre le volume de la moitié du boulet et celui d'un cylindre de même diamètre et d'une hauteur égale au rayon, c'est-à-dire trop petit d'un cylindre dont la hauteur est le $\frac{1}{2}$ du rayon du boulet. Maintenant le

diamètre du boulet est 1,96 pouce, dont la moitié est 0,98, et le tiers de ceci est environ 0,33. On voit donc par là que la longueur des cylindres que l'on supposait d'abord remplis par le fluide enflammé, longueurs qui sont 3,45, 5,99, 10,07, sont toutes trop petites de 0,33. Il suit donc qu'à cause de cela, toutes les valeurs de n doivent être augmentées dans le rapport de 3,45, 5,99 et 11,07 aux mêmes nombres augmentés de 0,33, ou à 3,78, 6,32 et 11,40 : en opérant ainsi on trouvera pour n les valeurs suivantes :

POUDRE.	C A N O N S.			
	1	2	3	4
onces.				
4	1359	1376	1427	1421
8	1457	1612	1793	1840
16	1660	1654	1811	1826

173. Une autre cause de diminution de la force est la perte du fluide qui s'échappe par la lumière et par le vent du boulet. Ces déperditions, vu l'extrême rapidité du courant, doivent être très considérables, et il est très difficile de les apprécier avec exactitude ; en sorte que la force du fluide élastique doit être beaucoup plus grande que celle que nous a donnée le calcul ci-dessus, fondé sur les vitesses trouvées par l'expérience.

Afin d'assigner la quantité de l'affaiblissement dans la force impulsive résultant de cette perte, il est nécessaire de connaître avec quelle vitesse le fluide élastique comprimé dans la pièce se meut en s'échappant par la lumière et par le vent du boulet. Ce degré de vitesse ne peut jamais être communiqué entièrement au boulet, puisque la poudre n'agit sur lui que par sa vitesse relative. Le boulet, par sa propre masse et par les obstacles que lui opposent les agens extérieurs, résistant au mouvement du fluide, il est aisé de concevoir que le boulet ne pourra jamais acquérir une vitesse aussi grande que celle du fluide, lorsque rien n'arrête son expansion. Il est donc évident que la plus grande vitesse que la poudre puisse communiquer au boulet sera toujours moindre que celle qu'acquerrait le fluide entièrement libre, dans le rapport du poids du boulet qu'elle pousse devant elle, et de la résistance que ce boulet doit surmonter, et il est par conséquent de la plus grande importance d'avoir une connaissance de cette vitesse de la flamme libre ; elle doit être immensément grande, à juger d'après la prodigieuse

vitesse qu'elle communique aux bombes et aux boulets les plus lourds, et il est probable qu'elle n'est pas moindre que trois ou quatre fois celle du boulet, dans les cas les plus ordinaires. Il y a plusieurs moyens de la déterminer, soit par l'expérience, soit par la théorie; mais avant de nous livrer à cette détermination, nous allons chercher quels secours nous pourrions tirer de nos propres expériences, et surtout en corrigeant convenablement notre expression de la vitesse du boulet, pour avoir égard à la perte du fluide par la lumière et par le vent du boulet.

174. Nous avons déjà parlé de cet objet dans les articles 77 et 113 du 34^e Traité. On y a vu que le tiers environ de la force se perdait par une différence de $\frac{1}{10}$ de pouce dans le vent, ou par la différence entre des boulets dont les diamètres sont 1,96 et 1,86, celui du cylindre de la pièce étant 2,02; que les quantités perdues étaient comme les espaces, et les espaces comme les différences des carrés des diamètres; par conséquent,

$$1,96^2 - 1,86^2 : \frac{1}{3} :: 2,02^2 - 1,96^2 : \frac{16}{77} \text{ à peu près } = 0,21,$$

qui est la partie de la force perdue par le vent ou par l'intervalle entre les diamètres 2,02 et 1,96. Il ne reste plus qu'à calculer la perte par la lumière. Si nous voulons l'estimer d'après son volume, ce qui ne s'écarte pas beaucoup de la vérité, son diamètre étant de $\frac{1}{5}$ de pouce $= 0,2$, nous aurons $1,96^2 - 1,86^2 : \frac{1}{5} :: 0,2^2 : 0,04$ environ, pour la force perdue par la lumière. Ces deux résultats réunis donnent 0,25 ou $\frac{1}{4}$ pour la perte par le vent et la lumière, avec le boulet dont le diamètre est 1,96; ainsi chacun des nombres de la dernière colonne devra être augmenté de $\frac{1}{4}$, ce qui donnera les nombres ci-dessous.

POUDRE.	C A N O N S.			
	1	2	3	4
onces.				
4	1700	1720	1784	1776
8	1821	2015	2241	2282
16	2075	2768	2264	2300

175. Tels sont donc finalement les nombres qui désignent la valeur de n , force initiale de la poudre enflammée, en y faisant entrer l'effet de la chaleur, et n'occupant que l'espace rempli par la poudre seule avant qu'on y mette le feu; et ce que nous avons trouvé est à peu près double de ce

qui est supposé par M. Robins. Avec chaque charge de poudre, il y a très peu de différence entre les résultats pour les quatre pièces de même diamètre, quoique les longueurs soient différentes. Les nombres n'augmentent que très peu avec la longueur des canons, et cette augmentation vient probablement de ce que la poudre agit plus long-temps sur les boulets dans les pièces les plus longues. Cette circonstance est la véritable raison de la petite différence que l'on remarque entre les valeurs de n ; mais une plus grande différence a lieu entre les effets des différentes charges pour la même pièce, où nous voyons régner une augmentation très uniforme, proportionnelle aux charges, ce qui provient sans doute du plus haut degré de chaleur développé par une plus grande quantité de poudre et qui est suffisante pour produire les effets que nous venons de signaler. Les nombres que nous avons trouvés paraissent représenter fidèlement les causes dont ils expriment les effets.

176. Passons maintenant à d'autres conséquences qui résultent des conclusions précédentes. Nous avons trouvé que la force de la poudre enflammée, lorsque le fluide occupe le même espace après l'inflammation qu'avant, était environ deux mille fois plus grande que la pression de l'atmosphère, le baromètre étant à 30 pouces, c'est-à-dire que cette force est égale à une colonne de mercure dont la hauteur serait de 60000 pouces ou 5000 pieds, ce qui est à peu près un mille, et cela en ayant égard à la chaleur de la flamme. Maintenant M. Robins, ainsi que d'autres physiciens, se sont assurés que le fluide élastique développé par l'inflammation d'un grain de poudre, abaissé à la température de l'air ordinaire et occupant un espace 244 fois plus grand que celui du grain de poudre, avait alors exactement la même force ou la même élasticité que l'air ordinaire, et que par conséquent ce fluide comprimé jusqu'à ce qu'il n'occupât plus que l'espace rempli d'abord par le grain de poudre, réduit à la température ordinaire, avait une force élastique proportionnelle à sa densité, par conséquent 244 fois plus grande que la pression atmosphérique. Ayant trouvé ensuite qu'une température égale à celle du fer rouge augmentait l'élasticité de l'air de 4 fois $\frac{1}{11}$, et supposant que la chaleur du fluide enflammé est égale à celle du fer rouge, il conclut que la force élastique du fluide enflammé était égale à $244 \times \frac{1}{11} = 998$ fois, ou en nombre rond 1000 fois plus grande que la pression atmosphérique.

177. C'est d'après ce principe que M. Robins dirigea toutes ses expériences et fit tous ses calculs; mais il est évident que cette manière d'assigner le degré de chaleur de la flamme doit être très incertaine et peu

satisfaisante, comme étant beaucoup au-dessous de la vérité, puisque toutes nos idées et nos expériences sur la chaleur du fluide enflammé nous prouvent qu'elle est plus grande que celle du fer rouge; et en effet, il résulte clairement de nos expériences, que la chaleur est au moins le double de celle du fer rouge, qu'elle rend l'élasticité du fluide au-delà de 8 fois plus grande. M. Robins, comme nous l'avons dit ci-dessus, prétend que le fluide élastique produit par l'inflammation de la poudre, et refroidi à la température de l'air ordinaire, est 244 fois plus dense que l'air, ce qui est une erreur radicale qui s'est ensuite introduite dans tous ses calculs. Ensuite, en augmentant le nombre 520 de sa $\frac{1}{15}$ partie, il s'est trompé en disant que cela donnait 575, tandis que ce n'est que 555; par conséquent il est arrivé de là qu'il a obtenu le nombre 244 au lieu de 236, qui est la mesure de l'élasticité du fluide refroidi, lorsqu'il occupe le même espace que la poudre. Mais nous avons trouvé, par nos expériences, qu'en ayant égard à la chaleur de la flamme, l'élasticité du fluide était 2000 fois plus grande que celle de l'atmosphère; ainsi la chaleur rend la force du fluide élastique 9 fois plus forte au lieu de 4 fois.

178. Nous allons maintenant déduire de là l'extrême degré de condensation du gaz élastique dans le nitre et la poudre à canon, ainsi que son étonnante force d'explosion. M. Robins, et d'autres physiciens, ont trouvé que les $\frac{3}{10}$ de la masse de la poudre consistaient en air pur condensé, ou que le poids de l'air pur qui y entraient était les $\frac{3}{10}$ de toute la composition; mais cette composition consiste en 8 parties (poids) dont 6 de nitre, 1 de soufre et 1 de charbon. Le nitre, ou les $\frac{3}{4}$ de la composition, fournit tout l'air condensé, tandis que le soufre et le charbon donnent seulement le feu qui produit l'explosion. Mais les $\frac{3}{10}$ de la masse totale 8 sont égaux à $\frac{4}{10}$ des 6 parties de nitre, c'est-à-dire que l'air condensé est formé par les $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ du nitre, ou le poids de l'air condensé dans le nitre est au poids des parties grossières du nitre comme 4 : 6 ou comme 2 : 3; et ces deux parties ont probablement la même densité ou la même pesanteur spécifique. Mais la pesanteur spécifique du nitre est 1900, celle de l'eau étant 1000, et celle de l'air ordinaire est 1,2, qui est contenu 1583 fois dans 1900; c'est-à-dire que l'air dans le nitre doit avoir une densité 1583 fois plus grande que celle de l'air ordinaire, pour que sa pesanteur spécifique soit égale à celle du nitre lui-même (1).

(1) Ces explications, ainsi que celles qui suivent, sont surannées. Une analyse chimique plus exacte a fait mieux connaître la nature des gaz développés de la poudre, et l'on a appris à mieux évaluer les effets dynamiques dont ces gaz sont susceptibles. Pour

179. La condensation de l'air dans le nitre peut encore se déterminer d'une autre manière. Les poids des trois ingrédients étant comme 6,1 et 1, et leur pesanteur spécifique comme 19 : 18 : 4, celle de l'eau étant 10, il s'ensuit que leurs volumes seront comme $\frac{6}{19} : \frac{1}{18} : \frac{1}{4}$, ou :: 216 : 38 : 171, en réduisant au même dénominateur 684. La première fraction $\frac{216}{684}$ est à peu près égale à la somme des deux autres, c'est-à-dire que le volume du nitre, dans la composition est la moitié du volume total. Or, l'air condensé = les $\frac{2}{5}$ du nitre et $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$; donc le volume de l'air est $\frac{1}{5}$ du mélange, considéré comme réunie en une masse solide; et la pesanteur spécifique de cette masse se trouvera en divisant son poids 8 par le volume, qui est $\frac{216}{684} + \frac{38}{684} + \frac{171}{684} = \frac{425}{684}$. Donc $8 : \frac{425}{684} = 12,8$ est la pesanteur spécifique de la masse solide, tandis que celle de la même masse réduite en poudre ordinaire est seulement 9,37. Donc, $9,37 : 12,8 :: 236$ (densité du fluide élastique ramené à l'espace occupé par la poudre) : 322 (densité du même fluide lorsqu'il ne tient que la place du solide). Mais l'espace occupé par l'air condensé est $\frac{1}{5}$ du tout, par conséquent $322 \times 5 = 1610$, est le nombre de fois qu'il est plus dense que l'air atmosphérique; ce qui est à peu près le même nombre que ci-dessus. Ainsi l'air est condensé dans le nitre à peu près 1600 fois, environ au double de la densité de l'eau, ce qui est probablement le plus grand degré de compression que l'air puisse recevoir. On voit par là combien est prodigieuse la force que la nature emploie à former le nitre; et comme cette immense force existe réellement dans la nature, il est probable que l'air, dans le nitre, est réduit à son plus grand état de compression possible; de là provient la similitude entre les différentes molécules du nitre.

180. Il reste maintenant à déterminer la vitesse avec laquelle se meut le fluide élastique lui-même. Si toute la substance de la poudre était changée en fluide élastique au moment de l'explosion, alors, d'après la connaissance que nous avons acquise par nos expériences, et de l'élasticité du fluide et de sa densité, nous pourrions déterminer la vitesse avec laquelle il commence à se répandre, et découvrir les augmentations successives qu'il acquiert dans son passage à travers l'âme du canon. Mais comme il est probable que toute la poudre ne s'enflamme pas; comme il est certain que la plus grande partie, que les $\frac{7}{10}$ consistent en matière grossière qui ne peut se

être devenues autres, les nouvelles explications n'en sont pas plus satisfaisantes; on en est toujours réduit à des conjectures sur le degré initial de température au moment de l'explosion.

réduire en fluide élastique, matière qui, dans l'explosion, est mêlée avec le fluide élastique et retarde par sa présence l'activité de l'explosion; que, de plus, ces matières ne sont pas uniformément distribuées et intimement unies de manière à recevoir un mouvement commun; dès-lors les parties non élastiques n'étant pas autant accélérées que les parties élastiques, ne sont pas toutes jetées hors de la pièce, ce que l'on voit par les quantités de substances onctueuses qui restent attachées aux parois des armes à feu, après qu'elles ont été déchargées. On voit également que le fluide élastique n'est pas uniformément distribué dans toute la longueur de l'âme, mais au contraire il est plus comprimé et plus dense vers la culasse. De là il doit résulter une grande incertitude dans l'application de nos formules, même à nos meilleures expériences : telle est la formule $v = 46,7 \cdot \sqrt{\frac{nhd^2}{p+w}} \log \frac{b}{a}$, pour la valeur de v , ou la formule $n = \frac{p+w}{2180hd^2} v^2 : \log \frac{b}{a}$, pour la valeur de la force initiale n ; car quoique ces deux valeurs dépendent l'une de l'autre, et que l'une d'elles, v par exemple, puisse très bien être déterminée par nos expériences, néanmoins la formule renferme la quantité p , dont il est impossible d'assigner la valeur exacte, et qui doit demeurer très incertaine, puisqu'elle n'a été estimée qu'approximativement. Dans la formule, p a été supposé égal à la moitié du poids de la poudre et du sac, évaluation évidemment trop grande, puisqu'elle suppose une diffusion et une densité uniformes dans la poudre enflammée. Néanmoins nous allons employer la première formule à déterminer la vitesse du fluide enflammé, ensuite nous ferons dans les résultats les corrections convenables.

181. Dans la formule $v = 46,7 \cdot \sqrt{\frac{nhd^2}{p+w}} \cdot \log \frac{b}{a} = 46,7d \cdot \sqrt{\frac{nh}{p+w}} \cdot \log \frac{b}{a}$, qui donne la vitesse finale du boulet dont le poids est w , il est évident que plus w sera petit, plus v la vitesse du boulet sera grande, aussi bien que celle du fluide élastique qui chasse le boulet; en supposant que la valeur de w diminue jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, pour ce cas, la formule devra donner la vitesse expansive du fluide élastique lui-même, qui ne sera sujette qu'à l'incertitude qui existe sur la valeur de p ; en omettant donc le poids w ,

il vient $v = 46,7d \sqrt{\frac{nh}{p}} \log \frac{b}{a}$, ou en mettant 1,96 au lieu de d ,

$$v = 91,532 \sqrt{\left(\frac{nh}{p} \log \frac{b}{a}\right)};$$

nous pouvons donc calculer les valeurs de v pour les différentes valeurs

des lettres a , b , n , h , p , valeurs qui sont rangées dans le tableau suivant pour les quatre sortes de pièces.

PIÈCES.		CHARGES DE POUDRE.					VITESSE
NUMÉROS.	LONGUEURS <i>b.</i>	POIDS en onces.	VALEURS DE				du gaz enflammé <i>v.</i>
			<i>a</i>	<i>h</i>	<i>p</i>	<i>n</i>	
1	28,53	4	3,45	2,54	2,25	1700	3841
		8	5,99	5,08	4,38	1821	3464
		16	11,07	10,16	8,66	2075	2896
2	38,43	4	3,45	2,54	2,25	1720	4127
		8	5,99	5,08	4,38	2015	3976
		16	11,07	10,16	8,66	2068	3305
3	57,70	4	3,45	2,54	2,25	1784	4544
		8	5,99	5,08	4,38	2241	4629
		16	11,07	10,16	8,66	2264	3995
4	80,23	4	3,45	2,54	2,25	1776	4791
		8	5,99	5,08	4,38	2282	4999
		16	11,07	10,16	8,66	2300	4405

En calculant donc par cette dernière formule la vitesse pour chacun des douze cas, on obtient les nombres qui se trouvent dans la dernière colonne de cette table. On y voit que ces nombres croissent graduellement du plus petit canon au plus grand, depuis 3000 jusqu'à 5000, comme on devait s'y attendre, mais dans un moindre rapport que la valeur de n . Les quatre moyennes des trois nombres qui se rapportent à chaque pièce sont 3400, 3803, 4389 et 4732, et la moyenne entre tous ces nombres est 4081. Mais, par diverses expériences, M. Robins a trouvé que la vitesse de la flamme s'élevait à 7000, ce qui s'approche probablement plus de la vérité, comme nous le soupçonnions d'après les raisons mentionnées ci-dessus. La différence entre notre résultat et celui de M. Robins provient surtout de ce que nous avons pris la moitié du poids de la charge pour la valeur de p , tandis qu'il est à présumer que p est une partie du poids beaucoup moindre. Si l'on fait le calcul dans la supposition de $p = \frac{1}{3}$ de la valeur que nous

lui avons donnée, on trouve $n = 7$ à 8000, ce qui est plus près de la vérité; et si l'on prend pour p les deux tiers de la valeur supposée plus haut, on trouve que n est entre 6 à 7000, ce qui est probablement la valeur la plus approchée.

182. Une autre conséquence que l'on peut déduire de notre formule relative à la vitesse, est la charge qui convient pour communiquer au boulet la plus grande vitesse possible. Il est facile de voir que la vitesse n'augmentera avec la charge de poudre que jusqu'à un certain degré; car lorsque l'âme est presque remplie de poudre, le boulet sortira de la pièce avant que la charge ait eu le temps de lui imprimer toute sa vitesse; et au contraire, si la charge est très petite, elle sera trop faible pour donner au boulet une impulsion suffisante. Ainsi, en augmentant les charges de poudre, la vitesse communiquée augmentera également jusqu'à un certain terme, au-delà duquel la vitesse décroîtra, quoique les charges augmentent. De là il suit que dans chaque pièce il y a une certaine charge qui donne au boulet la plus grande vitesse possible; prenant une charge plus grande ou plus petite, la vitesse du boulet est diminuée. Il est évident que la connaissance de cette charge est de la plus grande utilité dans l'Artillerie; car par ce moyen les artilleurs seront en état de donner la plus grande vitesse possible, et souvent d'épargner de la poudre, sachant qu'une plus forte charge, au lieu d'imprimer une vitesse plus rapide, en donnera une moindre. Ainsi, pour que le mouvement soit le plus rapide possible, il faut que la valeur de v soit un maximum, ou que sa différentielle soit égale à zéro, en regardant a comme variable.

183. Prenons donc la première formule

$$v = \sqrt{\left(\frac{4gmnaed^2}{w}\right) \times \log h. \frac{b}{a}};$$

en élevant au carré et omettant les facteurs constans, on a

$$a \times \log h. \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad \log \text{hyp.} \left(\frac{b}{a}\right)^a,$$

qui doit être un maximum; sa différentielle est $da \times \log h. \frac{b}{a} \cdot da = 0$. Donc $\log h. \frac{b}{a} = 1$, et $\frac{b}{a} =$ au nombre dont le logarithme hyperbolique est égal à 1; par conséquent,

$$\frac{b}{a} = 2,71828, \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{1}{2,71828};$$

la longueur de la charge est donc un peu plus grande que le tiers de la longueur de l'âme de la pièce. On a

$$a : b :: 1 : 2,71828, \text{ ou } :: 4 : 11, \text{ ou mieux } :: 7 : 19;$$

en sorte que la longueur de la charge, pour donner la plus grande vitesse doit être les $\frac{4}{11}$ ou les $\frac{7}{19}$, ou environ le $\frac{1}{3}$ de la longueur de l'âme; mais il a été trouvé par des expériences (article 124, Traité 34) que la charge propre à la plus grande vitesse est un peu moindre que celle que donne la théorie; car on a vu que les parties correspondantes pour les quatre espèces de pièces étaient $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{20}$. Les variations qu'on remarque ici, à mesure que les pièces deviennent plus longues, sont dues le plus souvent à la plus grande quantité de poudre enflammée et à l'action plus long-temps continuée du fluide sur le boulet dans l'âme de la pièce.

184. Mais nous pouvons parvenir théoriquement à des quantités encore plus approchées de celles trouvées par les expériences. A cet effet, au lieu d'employer la première formule, nous nous servirons de l'autre, qui est plus exacte; elle est $v^2 = \frac{4gmna cd^2}{p + w} \cdot \log \text{hyp. } \frac{b}{a}$; ou en omettant les facteurs constans, il faut que $\frac{acd^2}{p + w} \log \text{hyp. } \frac{b}{a}$ soit un maximum. Il est utile d'exprimer les quantités p et w en fonction de a et d ; or le volume du boulet étant $\frac{2}{3}cd^3$ ponce cube, et 1 ponce cube de fer fondu pesant 4,3 onces, il s'ensuit que

$$4,3 \times \frac{2}{3} cd^3 = 2,8 \times \frac{2}{3} cd^3 = w \text{ le poids du boulet.}$$

De même la longueur du cylindre de poudre et de sa gargousse étant a , son volume sera acd^2 ponces, et le poids d'un ponce cube est environ une demi-once, ou plutôt 0,54; par conséquent, $0,54acd^2 = 2p$, et $p = 0,27acd^2$. Substituant ces valeurs de w et de p dans le dénominateur, le maximum ci-dessus deviendra

$$\frac{acd^2}{0,27acd^2 + 2,8 \frac{2}{3} cd^3} \times \log \text{hyp. } \frac{b}{a}, \text{ ou bien } \frac{a}{10,6d + a} \times \log \text{h. } \frac{b}{a}.$$

En égalant sa différentielle à zéro, on a, toute réduction faite,

$$\log \text{hyp. } \frac{b}{a} = \frac{10,6d + a}{10,6d} = 1 + \frac{a}{10,6d}.$$

185. Quoiqu'il soit facile de trouver dans cette équation la valeur de a , pour des valeurs particulières de b et de d par la règle de fausse position, cependant il est plus convenable de trouver une équation et une valeur générale de la longueur de la charge a , débarrassée de logarithmes. Pour cela, nous nous servirons de la formule de M. Halley pour trouver le nombre dont on a le logarithme (1). On a $\frac{b}{a} = \frac{2+l}{2-l}$, où $\frac{b}{a}$ est le nombre cherché et l son logarithme hyperbolique; dans l'exemple actuel, $l = \frac{10,6d+a}{10,6d}$; faisant cette substitution, il viendra

$$\frac{b}{a} = \frac{31,8d+a}{10,6d-a} = 3 + \frac{4a}{10,6d-a}.$$

On voit par là que dans tous les cas la valeur de a sera d'autant moindre que $\frac{1}{3}b$, que la charge a sera plus grande. En mettant pour d sa valeur 1,96, on a l'équation

$$\frac{b}{a} = \frac{63+a}{21-a}, \quad \text{ou} \quad a^2 = (63+b)a = 21b.$$

En appliquant cette formule à la première de nos pièces, ou $b=28,53$, elle donne $a=6\frac{1}{7}$, d'où $\frac{b}{a}=4,6$ à peu près; et par l'expérience on a trouvé $\frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. En l'appliquant à la quatrième pièce, ou $b=80\frac{1}{4}$, il vient $a=11$ environ: par conséquent $\frac{b}{a}=7\frac{1}{4}$, et par l'expérience, $\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$. Ainsi dans chaque cas la formule donne pour a une valeur un peu plus grande, lorsqu'on met pour p dans le dénominateur $p+w$ la moitié du poids de la charge.

186. Mais nous avons trouvé plus haut, dans la détermination de la vitesse de la poudre, que la valeur la plus convenable pour p n'était pas la moitié du poids de la charge, mais plutôt $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}p$; en mettant donc ces valeurs pour p et faisant le même calcul, on trouve $a^2 + (96+b)a = 32b$; on voit que les coefficients numériques sont à ceux que nous avons trouvés dans le premier cas :: 3 : 2, ou dans le même rapport que p à $\frac{2}{3}p$, et cette équation devient $a^2 + (48+b)a = 16b$, lorsque a et b sont exprimés en parties du calibre de la pièce. En calculant donc la valeur de a par cette

(1) Voyez § 60.

équation, pour les quatre différentes longueurs de nos pièces, on aura à très peu près les mêmes nombres que ceux que nous avons trouvés par nos expériences. C'est à l'aide de cette même équation qu'on a calculé la table suivante des charges, pour les plus grandes vitesses des différentes pièces. Les longueurs sont exprimées en parties du calibre ou du diamètre de l'âme, et leur différence constante est 5.

LONGUEUR DES PIÈCES en parties du calibre.	LONGUEUR DES CHARGES en parties du calibre.
<i>b</i>	<i>a</i>
5	1,47
10	2,64
15	3,60
20	4,42
25	5,12
30	5,73
35	6,27
40	6,75
45	7,19
50.	7,58.

187. Tous ces calculs s'accordent très bien avec le résultat de l'expérience. Cette coïncidence est une preuve et une confirmation mutuelle des uns et des autres. M. Euler a donné une table semblable qu'il a déduite de la théorie, et dans laquelle les longueurs des charges sont tout-à-fait fausses étant toutes trop grandes dans le rapport de 1 à 1,64, et même de 1 à 1,90, ce qui est presque le double; et dans différens autres cas, les calculs du même auteur, quoiqu'ils soient très ingénieux, sont également erronés, parce qu'il ne connaissait pas la vraie loi de la résistance de l'air pour des corps qui se meuvent avec une grande vitesse.

188. D'après tout ce que nous avons établi dans les deux derniers articles, nous pouvons calculer une formule plus facile pour trouver la vitesse en général, ainsi que la plus grande vitesse d'un boulet pour une pièce et une charge de poudre données. Dans ces articles les quantités employées, excepté les nombres constans, peuvent être exprimées en calibre et parties du calibre du boulet, et alors $d = 1$. La formule générale est

$$v^2 = \frac{4gmn}{12} \times \frac{acd^2}{w + \frac{1}{3}w'} \cdot \log \text{hyp.} \frac{b}{a} = \frac{64 \times 230n}{12} \times \frac{acd^2}{w + \frac{1}{3}w'} \log \text{hyp.} \frac{b}{a}$$

$$= 1226n \times \frac{acd^2}{w + \frac{1}{3}w'} \log \text{hyp.} \frac{b}{a}, \text{ ou } v^2 = 2824n \times \frac{acd^2}{w + w'} \log \frac{b}{a},$$

ou en changeant les logarithmes hyperboliques en logarithmes tabulaires $v^2 = 8473n \times \frac{acd^2}{3w + w'} \log \frac{b}{a}$, formule où w désigne le poids du boulet, w' le poids de la poudre, n la force initiale de la poudre ou le nombre de fois qu'elle est plus forte que l'élasticité de l'air ordinaire, et $c = 0,7854$. Maintenant le diamètre du boulet étant d , son volume sera $\frac{\pi}{3}cd^3$ pouces cubes et son poids $w = 4,3 \frac{\pi}{3}cd^3 = \frac{8,6}{3}cd^3$, et le diamètre du volume de la poudre étant également d , et sa longueur a , son volume sera acd^2 , et son poids $0,54225acd^2$; substituant ces valeurs pour w et w' dans la formule ci-dessus, et en réduisant il vient à peu près $v^2 = 15625n \times \frac{a}{16d \times a} \log \frac{b}{a}$, ou faisant $\frac{a}{d} = q$, q désignant le nombre de fois que le diamètre est contenu dans la longueur de la charge, on a

$$v^2 = 15625n \times \frac{q}{16+q} \log \frac{b}{a}, \text{ ou } v = 125 \sqrt{\left(\frac{nq}{16+q} \times \log \frac{b}{a}\right)}:$$

telle est la formule la plus simple que l'on ait encore trouvée pour la vitesse du boulet; elle est générale pour tous les diamètres et toutes les longueurs des pièces, les dimensions étant exprimées en fonctions du diamètre. On peut également assigner la valeur numérique de n ; cette valeur varie d'après les charges et les longueurs, depuis 1700 jusqu'à 2300, ainsi que nous l'avons déterminé dans l'article 174. Mais l'établissement de ces valeurs de n était le résultat d'expériences faites avec des charges de poudre placées dans des gargousses, ce qui rend les longueurs des charges toujours plus grandes qu'elles ne le seraient si elles étaient sans gargousses, et principalement pour les petites charges. De plus, la formule ci-dessus suppose que a représente la longueur de la poudre seule, non compris le sac; ainsi le meilleur est de prendre une moyenne entre les différentes valeurs de n pour les grandes charges: cette moyenne est 2200 dont la racine carrée est 47; faisant cette substitution pour n , la formule devient enfin $v = 5875 \sqrt{\frac{q}{16+q} \times \log \frac{b}{a}}$, expression la plus simple et la plus exacte pour la vitesse du boulet, et elle convient à tous les cas. On peut aussi lui donner cette forme $v = 5875 \sqrt{\frac{a}{16+a} \log \frac{b}{a}}$, en exprimant a et b en fonction du diamètre de la pièce.

189. Nous allons maintenant nous servir de cette formule pour calculer, 1^o la

vitesse maxima des boulets lancés de diverses pièces dont les longueurs augmentent successivement de 2 diamètres de boulet; 2° les longueurs respectives des charges qui communiquent la plus grande vitesse; les résultats ainsi que les données correspondantes, toujours les mêmes quels que soient les calibres ou les diamètres de la pièce, sont arrangés dans la table suivante: la poudre est placée au fond de l'âme sans être renfermée dans un sac, et le diamètre du boulet est supposé égal, autant que possible, au calibre de la pièce, en sorte qu'il y a très peu ou point de vent.

LONGUEUR de l'âme en fonctions du calibre <i>b.</i>	LONGUEUR de la charge, <i>idem</i> , <i>a.</i>	QUOTIENT de $\frac{b}{a}$	POIDS de la poudre en centièmes du poids du boulet.	PLUS GRANDE vitesse du boulet pour chaque pièce.
2	0,63	3,171	12	810
4	1,20	3,333	23	1122
6	1,72	3,488	33	1348
8	2,20	3,636	42	1529
10	2,64	3,788	50	1681
12	3,05	3,934	58	1813
14	3,43	4,082	65	1929
16	3,78	4,233	71	2033
18	4,11	4,380	78	2127
20	4,42	4,525	84	2213
22	4,71	4,671	90	2292
24	4,99	4,810	95	2366
26	5,25	4,952	100	2434
28	5,50	5,091	105	2498
30	5,73	5,235	109	2558
32	5,96	5,369	113	2614
34	6,17	5,510	117	2668
36	6,37	5,651	121	2719
38	6,56	5,793	125	2767
40	6,75	5,926	128	2813
42	6,93	6,061	132	2857
44	7,10	6,197	135	2899
46	7,27	6,328	138	2939
48	7,43	6,460	141	2978
50	7,58	6,596	143	3015
52	7,72	6,736	146	3051
54	7,86	6,870	149	3085
56	8,00	7,000	152	3118
58	8,13	7,134	155	3150
60	8,26	7,264	157	3181

190. Dans cette table, la première colonne contient les différentes longueurs des canons ou mortiers, exprimées en fonction du calibre; elles

vont en augmentant de 2, en sorte qu'elle renferme toutes les longueurs des pièces en usage. De même la seconde colonne indique les longueurs correspondantes de la charge de poudre à nu, sans gargousse.

Ce sont ces charges qui produisent la plus grande vitesse du boulet dans chaque cas, et elles sont exprimées en fonctions du diamètre de la pièce; toutes ces valeurs de a ont été déterminées par la formule (§186) $a^2 + (48 + b)a = 16b$, en mettant pour b successivement 2, 4, 6, etc. La troisième colonne indique en 100° parties du poids du boulet quel est le poids des différentes charges de poudre dont les longueurs sont contenues dans la seconde colonne, et qui doivent produire la plus grande vitesse du boulet. Ainsi pour la première pièce dont la longueur n'est que de deux diamètres, le poids de la charge qui donne la plus grande vitesse est les $\frac{12}{100}$ ou $\frac{1}{8}$ environ de celui du boulet; pour la pièce d'une longueur de 10 diamètres, le poids de la charge est $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$ de celui du boulet; pour la pièce de 26 calibres, le poids de la charge est $\frac{100}{100}$, ou parfaitement égal à celui du boulet; et pour la dernière pièce dont l'âme est de 60 calibres, le poids de la poudre $\frac{157}{100}$ ou $1\frac{1}{2}$ celui du boulet. Cette colonne du poids des charges de poudre a été déduite de la longueur de ces charges, de la manière suivante. Dans l'article 184, on a vu que le poids du boulet était $\frac{3,6}{3} cd^3$ onces, et celui de la poudre $0,54225acd^2$; ces deux quantités sont entre elles comme d est à $0,19a$ ou à $\frac{1}{5}a$ à peu près, où d représente le calibre, a le nombre de fois qu'il est contenu dans la longueur de la charge; ainsi les valeurs de a dans la seconde colonne, multipliées 0,19 et divisées par 5,26, donneront le poids de la poudre en 100° de celui du boulet, ainsi qu'ils sont arrangés dans la quatrième colonne. Enfin la cinquième colonne renferme les plus grandes vitesses pour les mêmes pièces, avec les charges de poudre précédentes, et calculées par la formule $5875 \sqrt{\left(\frac{a}{16+a} \times \log \frac{b}{a}\right)}$, dans laquelle a et b sont exprimées en diamètres de la pièce. Ainsi cette table et les règles sont générales pour tous les diamètres et toutes les longueurs, et l'artillerie pratique peut en tirer un très grand avantage. Si l'on veut savoir quelle est la meilleure charge qu'il est nécessaire d'employer, connaissant seulement le nombre de fois que le calibre est contenu dans la longueur de l'âme, et le poids du boulet, on regardera dans la table et l'on trouvera la longueur et le poids de la charge de la poudre, ainsi que la vitesse qu'elle communiquera. Si la longueur, dans certain cas, tombe entre deux nombres

consécutifs de la première colonne, il suffira de prendre une moyenne entre les nombres correspondans qui sont dans les colonnes de la poudre et de la vitesse. Si l'on a besoin d'un moindre degré de vitesse, on trouvera la charge correspondante de poudre, en la prenant proportionnellement au carré de la vitesse, c'est-à-dire en faisant la proportion : le carré de la vitesse tabulaire est à la charge de poudre tabulaire comme le carré de la vitesse proposée est à la charge que l'on demande. Enfin l'on peut remarquer que cette table et les règles précédentes ayant été déduites d'un grand nombre d'expériences soignées, peuvent servir dans la pratique, d'une manière beaucoup plus satisfaisante que tout ce qui été fait sur cette matière jusqu'à présent.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

XXXIV^e TRAITÉ (FIN).

EXPÉRIENCES DE 1787, pour déterminer les pertes de vitesse des boulets dans l'air. Page	1
Expériences avec des boulets de diverses natures.....	6
Résumé des expériences de 1787.....	7
EXPÉRIENCES DE 1788, pour connaître la résistance de l'air et rattacher les grandes vitesses aux petites vitesses.....	8
Table des vitesses perdues, de 60 pieds en 60 pieds, et résistance de l'air.....	13
Expériences avec la pièce n° 3.....	14
<i>Idem</i> avec un nouveau pendule.....	18
Pénétrations proportionnelles aux charges.....	19
Expériences avec un nouveau bloc-pendule.....	24
<i>Idem</i> avec des pièces de 3.....	25
Pénétrations proportionnelles aux 4 ^{es} puissances des vitesses et aux racines carrées des longueurs.....	26
Table des moyennes vitesses.....	27
<i>Idem</i> de la résistance de l'air.....	30
EXPÉRIENCES DE 1789; leur objet.....	<i>ibid.</i>
Pièces de 3, longue et courte.....	31
Pièce de 6.....	35
Expériences avec des pièces et des mortiers, sur les portées.....	37
Reprise des expériences avec le pendule.....	39
Pièces de 3 et de 4.....	<i>ibid.</i>
Sommaire des expériences avec la pièce de 3, longue.....	45
Table des résistances.....	48
Observations sur les expériences de 1789.....	<i>ibid.</i>
Table des vitesses comparées aux distances et aux charges.....	50
Les vitesses, les portées et les charges comparées entre elles.....	51
Temps du trajet, portées et angle de chute.....	53
EXPÉRIENCES DE 1791. Pièce de 6.....	<i>ibid.</i>
Pièce moyenne.....	58
<i>Idem</i> longue.....	60
Nouveau bloc-pendule.....	61
<i>Idem</i>	66
Table synoptique des expériences précédentes.....	69
<i>Idem</i> des vitesses et des résistances.....	71

Observations sur les expériences de 1791.....	Page 72
La différence du poids des pièces n'a pas d'influence sur la vitesse des projectiles.....	74
Vitesses des projectiles à peu près proportionnelles à la racine carrée du poids des charges.....	<i>ibid.</i>
Faible avantage sur les portées, qu'on obtient en augmentant les longueurs des pièces.....	75
<i>Idem</i> en augmentant les charges au-delà d'une certaine limite.....	<i>ibid.</i>
Résistances de l'air proportionnelles à la surface des boulets.....	76

XXXV^e TRAITÉ.

<i>Sur une éprouvette de nouvelle invention</i>	76
Construction et description de l'éprouvette.....	79
Construction de l'échelle des cordes.....	80
Observations sur la manière de se servir de l'éprouvette.....	81
<i>Idem</i>	82

XXXVI^e TRAITÉ.

<i>Détermination de la résistance de l'air, au moyen d'une machine de rotation</i>	82
Expériences de Robins.....	84
<i>Idem</i> de Hutton en 1786, avec la machine de Robins.....	88
<i>Idem</i> avec un hémisphère attaché au bras de la machine.....	89
<i>Idem</i> avec un hémisphère, face plane en avant.....	92
<i>Idem</i> , <i>idem</i> convexe en avant.....	93
<i>Idem</i> grand hémisphère, face plane.....	96
Table des résultats des expériences sur l'hémisphère.....	100
Expériences sur un cylindre.....	101
<i>Idem</i> sur une sphère.....	102
<i>Idem</i> sur un cône, sommet en avant.....	103
<i>Idem</i> sur un cône, base en avant.....	<i>ibid.</i>
<i>Idem</i> sur le petit hémisphère, face plane.....	104
<i>Idem</i> sur un cône, base en avant.....	106
Table des vitesses et des résistances, pour le cône, la sphère, le cylindre, le grand et le petit hémisphère.....	108
Table des résistances moyennées sur ces mêmes corps.....	109
<i>Idem</i> vraies, exprimées en onces, éprouvées par ces mêmes corps.....	110
La résistance proportionnelle aux surfaces.....	111
<i>Idem</i> aux carrés des vitesses.....	112
Exposant exact de la vitesse auquel la résistance est proportionnelle.....	<i>ibid.</i>
Les extrémités arrondies éprouvent moins de résistance que les extrémités planes.....	113

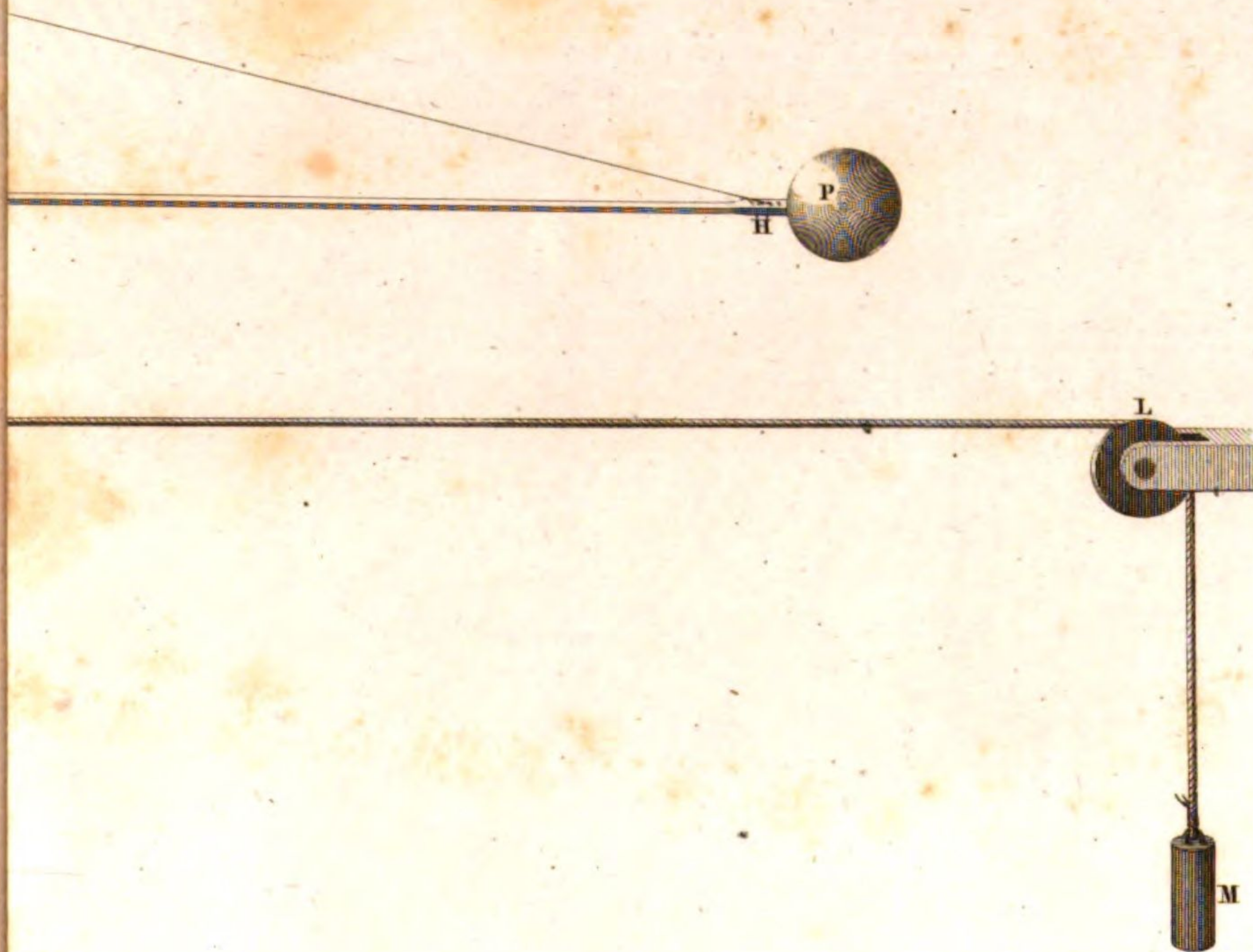
Les résistances varient avec la forme des parties postérieures des corps en mouvement.....	Page 113
La résistance sur la base est à la résistance sur la face convexe de l'hémisphère comme $2\frac{2}{5}$ est à 1.....	<i>ibid.</i>
Problèmes sur la résistance.....	114
Résistances éprouvées par les projectiles de l'Artillerie.....	115
Différence entre les résultats de l'expérience et de la théorie.....	116
EXPÉRIENCE DE 1787.....	<i>ibid.</i>
<i>Idem</i> sur le cône et petit hémisphère.....	117
<i>Idem</i> DE 1788 avec un plateau.....	118
Table des résultats.....	120
Expériences sur le plateau, diversement incliné.....	121
Table des résultats.....	122
Exposans du sinus des angles d'inclinaison.....	124
Expériences sur le triangle équilatéral.....	127
Table des rapports des résistances et des sinus des angles d'inclinaison.....	128
Formule qui donne la résistance en fonction de l'aire, de la vitesse et du sinus de l'angle d'inclinaison.....	129

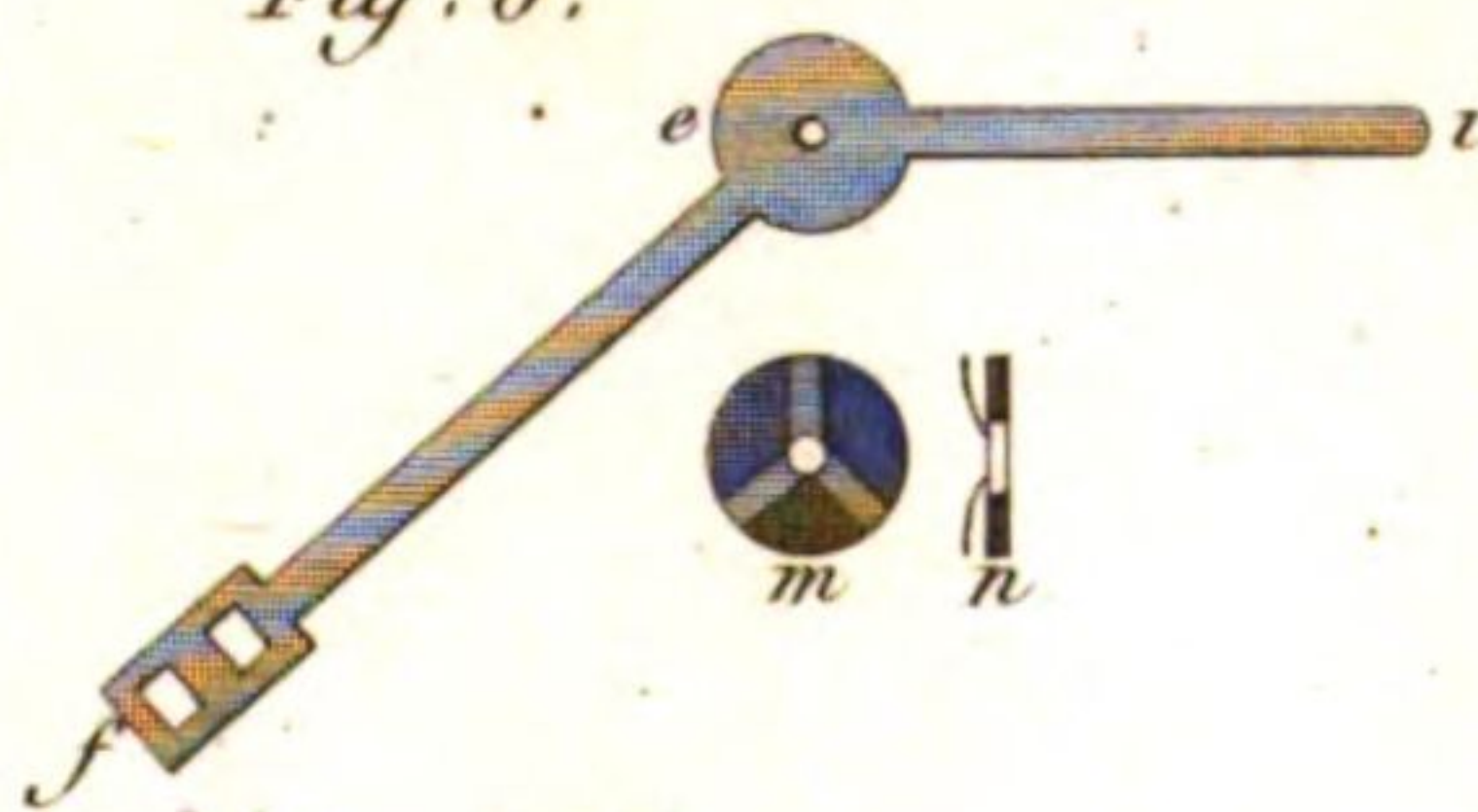
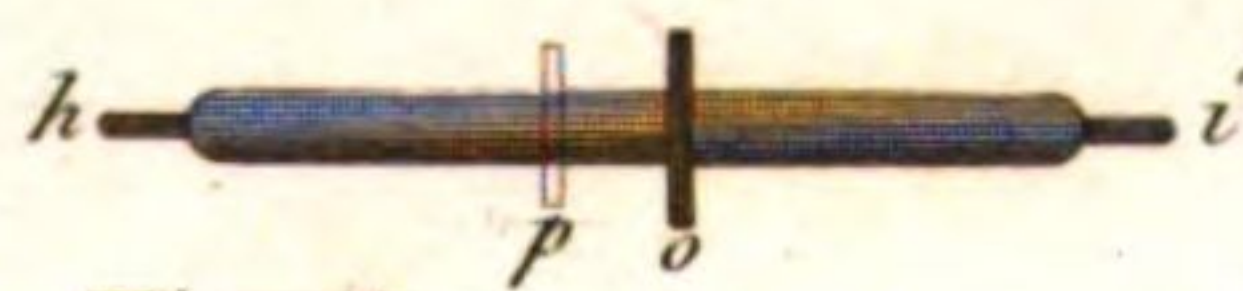
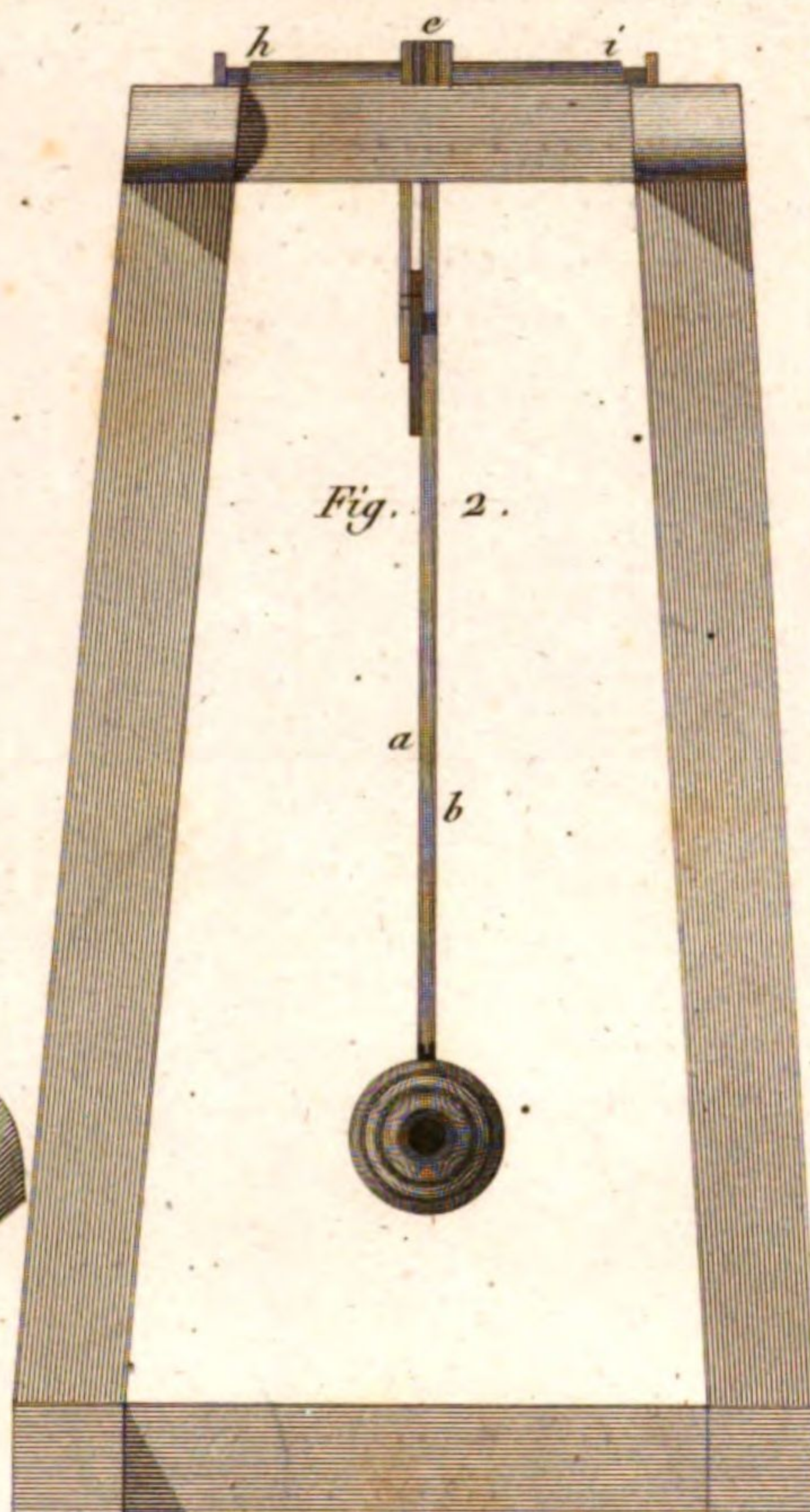
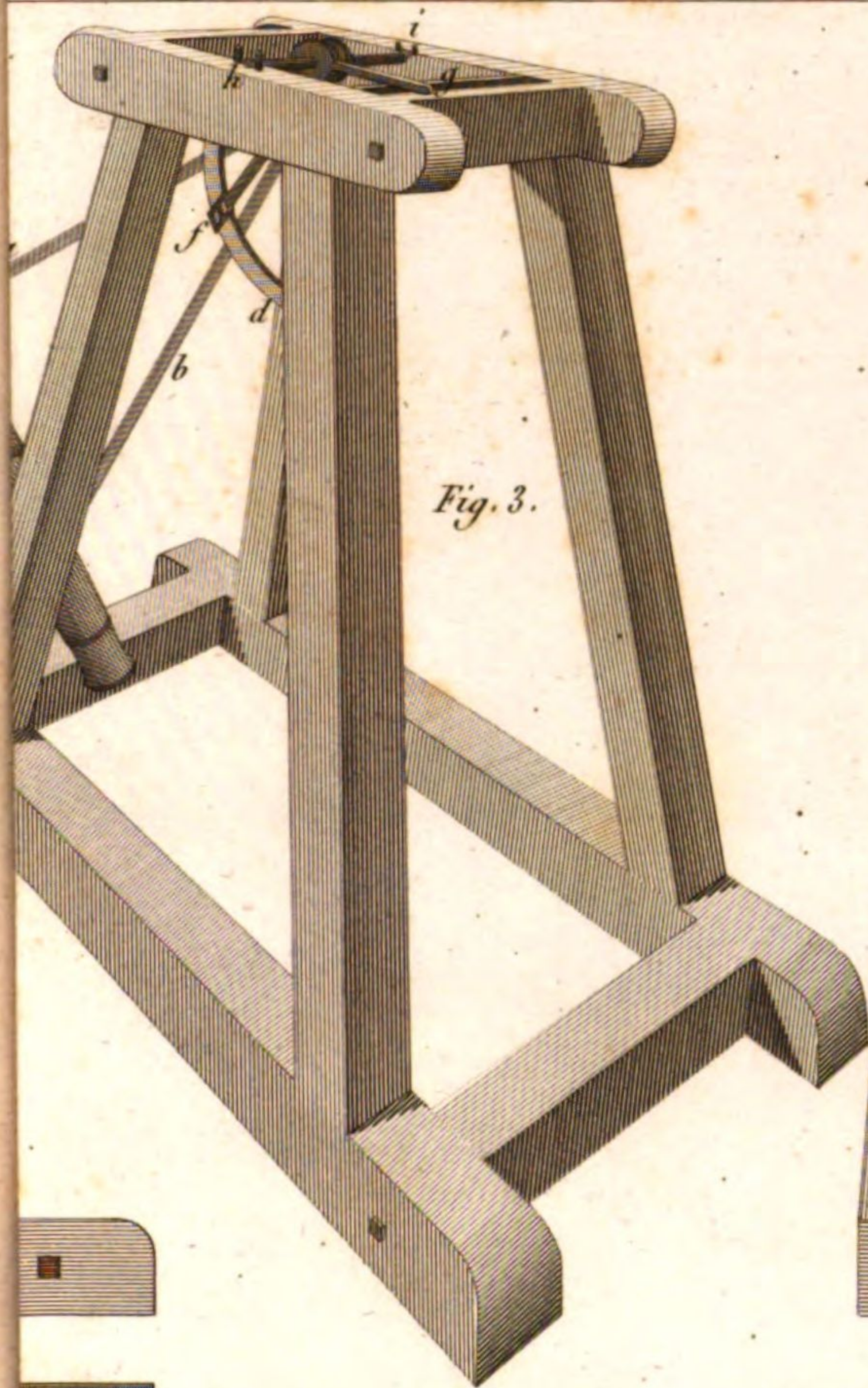
XXXVII^e TRAITÉ.

<i>Théorie et pratique de l'Artillerie, ayant égard à la résistance de l'air</i>	129
Résumé et conséquences des épreuves de 1783, 84, 85 et 86.....	131
<i>Idem</i> de 1787, 88, 89 et 90.....	136
Résistances proportionnelles à la puissance $2\frac{1}{2}$ de la vitesse.....	<i>ibid.</i>
Même loi dans les petits mouvemens.....	<i>ibid.</i>
Table de la résistance qu'oppose l'air à un boulet de 2 pouces.....	137
<i>Idem</i> des amplitudes, temps de trajet, vitesses, etc.....	141
1 ^{er} PROBLÈME. Déterminer la résistance du milieu contre un projectile de dimension quelconque.....	142
2 ^e PROBLÈME. Assigner une règle pour trouver la résistance due à une vitesse quelconque et pour un boulet donné.....	143
Formules pour calculer la résistance.....	144
Table des résistances calculées d'après les formules.....	147
3 ^e PROBLÈME. Déterminer la hauteur à laquelle s'élève un projectile lancé verticalement dans le vide.....	149
4 ^e PROBLÈME. <i>Idem</i> ayant égard à la résistance de l'air.....	150
5 ^e PROBLÈME. <i>Idem</i> dans l'air, la résistance étant proportionnelle au carré de la vitesse.....	153
6 ^e PROBLÈME. Sur le temps que le boulet met à s'élever dans l'air, à la hauteur déterminée dans le dernier problème.....	155
7 ^e PROBLÈME. Déterminer le temps que met un boulet lancé verticalement, à s'élever à sa plus grande hauteur.....	158

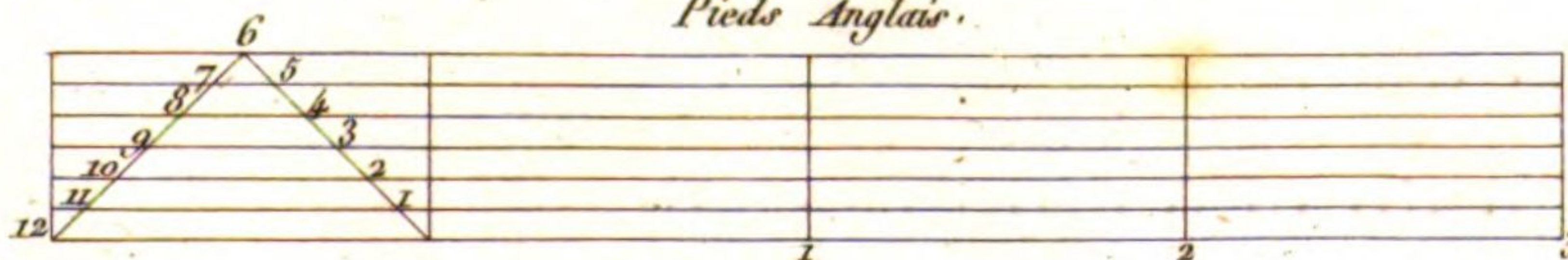
8 ^e PROBLÈME. Déterminer la hauteur de l'ascension, ayant égard au décroissement de la densité de l'air.	Page 159
9 ^e PROBLÈME. Déterminer le temps du trajet, ayant égard au décroissement de la densité de l'air.	163
10 ^e PROBLÈME. Déterminer toutes les circonstances du mouvement d'un boulet abandonné à son propre poids dans l'air.	164
11 ^e PROBLÈME. Déterminer les circonstances du mouvement d'un boulet projeté horizontalement dans l'air, en faisant abstraction de la descente verticale produite par la gravité.	169
12 ^e PROBLÈME. Trouver la courbe décrite par les projectiles dans l'air.	174
13 ^e PROBLÈME. Assigner la charge de poudre nécessaire pour projeter un boulet donné avec une vitesse donnée.	176
14 ^e PROBLÈME. Déterminer l'élévation qu'il faut donner à une pièce pour atteindre un objet placé à une distance donnée, la vitesse initiale étant connue.	178
15 ^e PROBLÈME. Déterminer l'angle d'élévation qui donne la plus grande amplitude, et trouver la longueur de cette amplitude pour une vitesse donnée.	183
Table des élévations qui donnent la plus grande amplitude.	186
<i>Idem</i> des dimensions, etc., des mortiers (anglais).	188
Sur les mortiers de Villantroys.	189
16 ^e PROBLÈME. Déterminer les portées pour d'autres élévations obliques.	190
Principes de Robison.	191
Table des portées d'un boulet de 24, sous l'angle de 45°.	192
Usage de la table.	193
17 ^e PROBLÈME. Déterminer les pénétrations des boulets dans différentes substances.	194
18 ^e PROBLÈME. Déterminer les circonstances du mouvement d'un boulet qui se meut avec une vitesse donnée et pénètre dans un bloc mobile de bois.	203
19 ^e PROBLÈME. Déterminer les circonstances du mouvement relatives à un boulet lancé avec une charge de poudre donnée.	205
Application aux expériences de 1786.	209
Formules et tables relatives à la force de la poudre.	210
<i>Idem</i> relatives à la vitesse du gaz enflammé.	218

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.





Pieds Anglais.



Inv. N° 1723



Hutton, Charles,

Nouvelles expériences d'artillerie faites pendant les années 1787, 1788, 1789 et 1791 ...

Bd.: 2

Paris 1826

4 App.mil. 103 c-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10220977-6